

DISEÑO ÓPTIMO DE DIAGRAMAS EWMA.

NELSON BRACHO

Departamento de Estadística Universidad de Oriente.

RESUMEN

En este artículo se describe el esquema de Crowder para diseñar un diagrama EWMA y se presentan algunas tablas con resultados de longitud media de corrida que permiten el diseño del mismo.

PALABRAS CLAVES: Diseño Óptimo, Diagrama EWMA, LMC.

ABSTRACT

This paper describes Crowder's outline for the design of an EWMA chart, and presents some tables with the results of average run length which allow this EWMA chart design.

KEY WORDS: Optimal Design, EWMA Chart, ARL.

INTRODUCCIÓN

El diagrama de control Promedio Móvil Exponencialmente Ponderado (diagrama EWMA) fue introducido en el control estadístico de la calidad por Roberts (1959), como una herramienta, para controlar la media de un proceso de producción. El autor asumiendo un proceso independiente e idénticamente distribuido normal, presentó curvas de Longitud Media de Corrida (LMC) basadas sobre simulaciones y concluyó, que el diagrama EWMA es mejor que el diagrama \bar{X} para detectar pequeños cambios (cambios entre $\pm 2.0\sigma$) en la media de procesos. Sin embargo, el diagrama EWMA, propuesto por Roberts, no ha sido utilizado en la práctica como se esperaba, esto es debido básicamente a que la selección de la constante suavizadora λ ($0 < \lambda \leq 1$) y la amplitud k de los límites de control para diseñar el diagrama se hacen de manera arbitraria. Crowder (1989) propone un esquema de diseño óptimo del diagrama EWMA, basado sobre la LMC, que resuelve el problema de la escogencia de λ y los límites de control; además presenta algunas gráficas de LMC para el diseño del diagrama. Obtener (λ, k) de las gráficas de LMC es un poco engorroso, por lo que el propósito de este artículo es presentar algunas tablas de LMC del diagrama EWMA, que hagan más fácil el diseño del mismo.

PROMEDIO MÓVIL EXPONENCIALMENTE PONDERADO (EWMA).

Los valores sucesivos de un EWMA generados por el estadístico muestral Y_t vienen expresado por:

$$Z_t = (1-\lambda)Z_{t-1} + \lambda Y_t \text{ con } 0 < \lambda \leq 1 \text{ y } t = 1, 2, \dots$$

Z_t es el valor del EWMA en el tiempo t , Y_t es una observación individual o una media muestral en el tiempo t , asumiendo con distribución normal, y λ es una constante suavizadora. Nótese que para $\lambda = 1$, el valor del EWMA depende únicamente de la observación más reciente como es el caso del diagrama \bar{X} , mientras que para valores de λ cercanos a cero la observación más reciente recibe poco peso, como es el caso del diagrama CUSUM.

LÍMITES DE CONTROL DEL DIAGRAMA EWMA

En lo que sigue, se asume que las Y_t son medias muestrales distribuidas independientemente $N(\mu, \sigma^2/n)$, con μ y σ^2 conocidas. Bajo estos supuestos Roberts (1959) muestra que:

(1)

donde μ_z y σ_z^2 son la media y la variancia del EWMA

respectivamente. Por consiguiente, los límites de control del diagrama EWMA de amplitud k -sigma vienen dados por:

$$LSC = \mu_z + k\sigma_z = \mu + k \left[\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right]^{1/2} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$$

y

$$LIC = \mu_z - k\sigma_z = \mu - k \left[\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right]^{1/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

DISEÑO ÓPTIMO DEL DIAGRAMA EWMA.

La estrategia del diseño está basada en seleccionar (λ, K) de tal manera que dada la longitud media de corrida (LMC) bajo control, la LMC del diagrama de un cambio D en la media (en unidades de σ / \sqrt{n}) sea mínima. La combinación (λ, K) es óptima en el sentido de que para una LMC bajo control elegida, producirá una LMC fuera de control mínima.

Para el diseño del diagrama EWMA con estas condiciones, Crowder (1989) recomienda las siguientes etapas:

Etapla 1:

Elegir la menor LMC aceptable cuando el cambio en la media es $D = 0$. La Selección de la LMC está basada informalmente sobre condiciones, tales como el costo asociado a una falsa alarma y el tiempo del proceso.

Etapla 2:

Decidir qué magnitud del cambio en la media debe ser detectada lo más rápido posible.

Etapla 3:

Una vez que se tenga la LMC de la Etapla 1 y la magnitud del cambio de la Etapla 2, en la tabla correspondiente a la LMC de la Etapla 1, se escogen los valores de λ y K que hacen mínima la LMC para el cambio especificado en la Etapla 2.

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA LMC DEL DIAGRAMA EWMA.

Crowder (1987a y b), muestran que la LMC del diagrama EWMA puede ser expresada como la solución de la ecuación integral:

$$L(D) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{-h}^h L(y) f\{[y - (1 - \lambda)D]/\lambda\} dy$$

donde D es la magnitud del cambio, f es la función de densidad de probabilidad $N(0,1)$ y $h = k \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right)^{1/2}$. Usando cuadratura de Gauss de m puntos, la ecuación (3) puede ser expresada numéricamente como

$$L(D) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f\{[P_i - (1 - \lambda)D]/\lambda\}$$

Evalutando $L(D)$ en el cambio $D = d$ y los puntos P_i , $i = 1, 2, \dots, m$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$L(d) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f\{[P_i - (1 - \lambda)d]/\lambda\}$$

$$L(P_1) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f\{[P_i - (1 - \lambda)P_1]/\lambda\}$$

•
•
•

$$L(P_m) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f\{[P_i - (1 - \lambda)P_m]/\lambda\}$$

Asignándoles valores a λ y k , el sistema de ecuaciones lineales, se puede resolver y obtener la LMC del cambio $D = d$ ($L(d)$). Se elaboraron tablas para LMC bajo control de 100, 250, 370, 500, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con ayuda de un programa en FORTRAN, utilizando cuadratura de Gauss de 24 puntos.

EJEMPLO DE UN DISEÑO ÓPTIMO DE DIAGRAMA EWMA.

Supóngase que se quiere diseñar un diagrama EWMA, con $LMC = 250$, cuando $D = 0$, y que detecte rápidamente

un cambio en la media de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Etapla 1:

La LMC bajo control ($D = 0$) es 250.

Etapla 2:

El cambio en la media que debe ser detectado lo más

rápido posible es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, $D = 1.0$.

Etapa 3:

De la tabla 2 correspondiente a la LMC bajo control de 250, se tiene que los valores de λ y k que hacen mínima la LMC para $D = 1.0$ son: $\lambda = 0.15$ y $K = 2.654$; sustituyendo estos valores de λ y K en la expresión dada en (2) se tiene que los límites de control del diagrama EWMA son.

$$LSC = \mu + 2.654 \left[\frac{0.15}{2 - 0.15} \right]^{1/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + 0.756 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y

$$LIC = \mu - 2.654 \left[\frac{0.15}{2 - 0.15} \right]^{1/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 0.756 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

TABLA N° 1 Longitud Media de Corrida Bajo Control para 100

$\lambda =$ D K =	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.45
0.00	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.25	38.90	41.60	4.70	47.90	50.80	53.60	56.20	58.70	61.00	61.00
0.50	17.40	17.60	18.40	19.50	20.80	2.30	23.80	25.50	27.20	27.20
0.75	10.80	10.30	10.30	10.60	11.00	11.60	12.20	12.90	13.80	13.80
1.00	7.80	7.20	7.00	7.00	7.10	7.20	7.50	7.80	8.20	8.20
1.25	6.20	5.50	5.30	5.10	5.10	5.10	5.20	5.30	5.50	5.50
1.50	5.10	4.50	4.20	4.10	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
1.75	4.40	3.80	3.60	3.40	3.30	3.20	3.20	3.20	3.20	3.20
2.00	3.80	3.30	3.10	2.90	2.80	2.70	2.70	2.60	2.60	2.60
2.25	3.40	3.00	2.70	2.60	2.50	2.40	2.30	2.30	2.20	2.20
2.50	3.10	2.70	2.50	2.30	2.20	2.10	2.10	2.00	2.00	2.00
2.75	2.80	2.50	2.30	2.10	2.00	1.90	1.90	1.80	1.70	1.70
3.00	2.60	2.30	2.10	2.00	1.80	1.80	1.70	1.60	1.60	1.60
3.25	2.40	2.10	2.00	1.80	1.70	1.60	1.50	1.50	1.40	1.40
3.50	2.30	2.00	1.80	1.70	1.60	1.50	1.40	1.40	1.30	1.30
3.75	2.20	1.90	1.70	1.60	1.50	1.40	1.30	1.30	1.20	1.20
4.00	2.10	1.80	1.60	1.50	1.40	1.30	1.20	1.20	1.20	1.20
$\lambda =$ D K =	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.95
	2.545	2.553	2.56	2.565	2.569	2.571	2.573	2.575	2.576	2.576
0.00	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.25	65.30	67.30	69.40	71.20	73.00	74.60	76.20	77.90	79.50	79.50
0.50	30.80	32.60	34.60	36.70	38.80	40.80	43.00	45.30	47.70	47.70
0.75	15.70	16.70	17.90	19.20	20.50	22.00	23.60	25.30	27.20	27.20
1.00	9.10	9.70	10.30	11.00	11.80	12.70	13.70	14.80	16.00	16.00
1.25	5.90	6.20	6.60	7.00	7.40	7.90	8.50	9.20	9.90	9.90
1.50	4.30	4.40	4.60	4.80	5.00	5.30	5.70	6.10	6.50	6.50
1.75	3.30	3.30	3.40	3.50	3.70	3.80	4.00	4.30	4.50	4.50
2.00	2.60	2.70	2.70	2.70	2.80	2.90	3.00	3.20	3.30	3.30
2.25	2.20	2.20	2.20	2.20	2.30	2.30	2.40	2.50	2.60	2.60
2.50	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	2.00	2.00	2.10	2.10
2.75	1.70	1.70	1.70	1.60	1.60	1.60	1.70	1.70	1.70	1.70
3.00	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50
3.25	1.40	1.40	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30
3.50	1.30	1.30	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20
3.75	1.20	1.20	1.20	1.20	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
4.00	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CROWDER, S. V. 1987a. A simple method for studying run length distributions of exponentially weighted moving average chart. *Technometrics*. (29): 401 - 407.

CROWDER, S. V. 1987b. Average lengths of exponentially weighted moving average control charts. *Journal Quality Technology*. (19): 161 - 164.

CROWDER, S. V. 1989. Design of exponentially weighted moving average schemes. *Journal Quality Technology*. (21): 155 - 168.

ROBERTS, S. W. 1959 Control chart test based on geometric moving average. *Technometrics*. (1): 239 - 250.

TABLA N° 2 Longitud Media de Corrida Bajo Control para 250

$\lambda =$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
D $K =$	2.32	2.55	2.65	2.72	2.76	2.79	2.81	2.83	2.84	2.85
0.00	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250
0.25	60.90	71.20	81.50	91.50	100.6	109.3	117.4	125.3	132.5	139.2
0.50	23.60	24.60	27.00	30.00	33.40	37.10	41.10	45.40	49.70	54.30
0.75	14.00	13.30	13.70	14.40	15.50	16.80	18.40	20.10	22.00	24.20
1.00	9.90	9.00	8.80	8.90	9.20	9.60	10.20	11.00	11.80	12.80
1.25	7.70	6.70	6.40	6.30	6.30	6.50	6.70	7.00	7.40	7.80
1.50	6.30	5.40	5.10	4.90	4.80	4.80	4.90	5.00	5.10	5.40
1.75	5.30	4.60	4.20	4.00	3.90	3.80	3.80	3.80	3.90	4.00
2.00	4.60	3.90	3.60	3.40	3.30	3.20	3.10	3.10	3.10	3.20
2.25	4.10	3.50	3.20	3.00	2.80	2.70	2.70	2.70	2.60	2.60
2.50	3.70	3.10	2.80	2.60	2.50	2.40	2.40	2.30	2.30	2.20
2.75	3.40	2.80	2.60	2.40	2.30	2.20	2.10	2.10	2.00	2.00
3.00	3.10	2.60	2.40	2.20	2.10	2.00	1.90	1.90	1.80	1.80
3.25	2.90	2.40	2.20	2.10	1.90	1.80	1.80	1.70	1.60	1.60
3.50	2.70	2.30	2.10	1.90	1.80	1.70	1.60	1.60	1.50	1.50
3.75	2.60	2.20	2.00	1.80	1.70	1.60	1.50	1.40	1.40	1.30
4.00	2.40	2.10	1.90	1.70	1.60	1.50	1.40	1.30	1.30	1.20
$\lambda =$	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
D $k =$	2.86	2.86	2.87	2.87	2.87	2.88	2.88	2.88	2.88	2.88
0.00	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250
0.25	146.0	152.1	158.0	163.6	169.4	174.7	179.7	184.6	188.9	193.3
0.50	59.10	64.10	69.20	74.50	80.10	85.90	91.80	97.90	104.0	110.3
0.75	26.60	29.10	31.90	35.00	38.40	42.00	45.90	50.10	54.60	59.50
1.00	13.90	15.20	16.60	18.20	20.10	22.20	24.50	27.00	29.90	33.10
1.25	8.40	9.00	9.70	10.60	11.60	12.80	14.10	15.60	17.30	19.30
1.50	5.60	5.90	6.30	6.80	7.30	8.00	8.70	9.60	10.70	11.90
1.75	4.10	4.30	4.50	4.70	5.00	5.40	5.80	6.30	7.00	7.70
2.00	3.20	3.30	3.40	3.50	3.70	3.90	4.10	4.40	4.80	5.30
2.25	2.60	2.70	2.70	2.80	2.80	3.00	3.10	3.30	3.50	3.80
2.50	2.20	2.20	2.20	2.30	2.30	2.40	2.40	2.50	2.70	2.80
2.75	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	2.00	2.00	2.10	2.10	2.20
3.00	1.70	1.70	1.70	1.70	1.70	1.70	1.70	1.70	1.80	1.80
3.25	1.60	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.60
3.50	1.40	1.40	1.40	1.40	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.40
3.75	1.30	1.30	1.30	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20
4.00	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.10	1.10	1.10	1.20

TABLA N° 3 Longitud Media de Corrida Bajo Control para 370

$\lambda =$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
D K=	2.466	2.701	2.8	2.859	2.898	2.925	2.944	2.959	2.969	2.978
0.00	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370
0.25	71.30	89.20	105.5	121.0	135.0	149.1	161.6	173.9	184.9	196.2
0.50	26.00	28.20	31.80	36.20	41.10	46.50	52.30	58.50	64.80	71.70
0.75	15.10	14.70	15.30	16.40	18.00	19.80	22.00	24.40	27.10	30.20
1.00	10.60	9.70	9.60	9.80	10.20	10.90	11.70	12.70	13.90	15.20
1.25	8.20	7.30	6.90	6.80	6.90	7.10	7.40	7.80	8.40	9.00
1.50	6.70	5.80	5.40	5.20	5.20	5.20	5.30	5.50	5.70	6.00
1.75	5.70	4.80	4.50	4.20	4.10	4.10	4.10	4.20	4.20	4.40
2.00	4.90	4.20	3.80	3.60	3.50	3.40	3.40	3.30	3.40	3.40
2.25	4.40	3.70	3.30	3.10	3.00	2.90	2.80	2.80	2.80	2.80
2.50	3.90	3.30	3.00	2.80	2.60	2.60	2.50	2.40	2.40	2.40
2.75	3.60	3.00	2.70	2.50	2.40	2.30	2.20	2.20	2.10	2.10
3.00	3.30	2.80	2.50	2.30	2.20	2.10	2.00	1.90	1.90	1.90
3.25	3.10	2.60	2.30	2.10	2.00	1.90	1.80	1.80	1.70	1.70
3.50	2.90	2.40	2.20	2.00	1.90	1.80	1.70	1.60	1.60	1.5
3.75	2.70	2.20	2.10	1.90	1.80	1.70	1.60	1.50	1.40	1.40
4.00	2.50	2.10	2.00	1.80	1.70	1.60	1.50	1.40	1.30	1.30
$\lambda =$	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
D K=	2.984	2.988	2.992	2.994	2.996	2.998	2.999	2.999	3	3
0.00	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370
0.25	206.4	215.9	225.6	234.2	242.8	251.5	259.5	266.5	274.3	281.2
0.50	78.70	86.00	93.70	101.5	109.8	118.5	127.3	136.2	145.7	155.2
0.75	33.60	37.20	41.30	45.70	50.50	55.80	61.40	67.40	74.10	81.20
1.00	16.80	18.60	20.60	22.90	25.40	28.40	31.60	35.20	39.40	43.90
1.25	9.70	10.60	11.60	12.80	14.20	15.80	17.60	19.70	22.20	25.00
1.50	6.30	6.80	7.30	7.90	8.70	9.60	10.60	11.80	13.30	15.00
1.75	4.50	4.80	5.00	5.40	5.80	6.30	6.90	7.60	8.40	9.50
2.00	3.50	3.60	3.70	3.90	4.10	4.40	4.80	5.20	5.70	6.30
2.25	2.80	2.90	2.90	3.00	3.10	3.30	3.50	3.70	4.00	4.40
2.50	2.40	2.40	2.40	2.50	2.50	2.60	2.70	2.80	3.00	3.20
2.75	2.10	2.00	2.00	2.10	2.10	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50
3.00	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.90	1.90	2.00
3.25	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.70
3.50	1.50	1.50	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40
3.75	1.40	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30
4.00	1.30	1.30	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20

TABLA N° 4 Longitud Media de Corrida Bajo Control para 500

$\lambda=$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
D	1.52	1.81	1.96	2.05	2.12	2.17	2.20	2.23	2.25	2.27
0.00	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
0.25	84.00	106.3	128.8	150.2	170.3	189.2	207.0	223.7	239.8	254.8
0.50	28.80	31.30	36.00	41.80	48.30	55.40	63.10	71.20	79.80	88.80
0.75	16.40	15.80	16.70	18.10	20.10	22.50	25.30	28.40	32.00	35.90
1.00	11.40	10.30	10.20	10.50	11.10	12.00	13.00	14.30	15.80	17.50
1.25	8.70	7.60	7.30	7.20	7.40	7.70	8.10	8.60	9.20	10.00
1.50	7.10	6.10	5.70	5.50	5.50	5.50	5.70	5.90	6.20	6.50
1.75	6.00	5.10	4.70	4.40	4.30	4.30	4.30	4.40	4.50	4.70
2.00	5.20	4.40	4.00	3.70	3.60	3.50	3.50	3.50	3.60	3.60
2.25	4.60	3.80	3.50	3.20	3.10	3.00	3.00	2.90	2.90	3.00
2.50	4.20	3.40	3.10	2.90	2.70	2.70	2.60	2.50	2.50	2.50
2.75	3.80	3.10	2.80	2.60	2.50	2.40	2.30	2.20	2.20	2.20
3.00	3.50	2.90	2.60	2.40	2.30	2.20	2.10	2.00	2.00	1.90
3.25	3.20	2.70	2.40	2.20	2.10	2.00	1.90	1.80	1.80	1.70
3.50	3.00	2.50	2.20	2.10	2.00	1.90	1.80	1.70	1.60	1.60
3.75	2.90	2.30	2.10	2.00	1.80	1.70	1.60	1.60	1.50	1.40
4.00	2.70	2.20	2.00	1.90	1.70	1.60	1.50	1.40	1.40	1.30
$\lambda=$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
D	2.28	2.29	2.30	2.31	2.32	2.32	2.32	2.33	2.33	2.33
0.00	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
0.25	269.7	283.4	296.6	309.0	321.5	333.0	343.3	354.5	364.3	373.9
0.50	98.40	108.3	118.6	129.2	140.5	152.0	163.6	176.1	188.6	201.4
0.75	40.30	45.20	50.50	56.20	62.60	69.50	76.80	85.00	93.70	103.1
1.00	19.50	21.80	24.40	27.30	30.70	34.40	38.60	43.40	48.60	54.60
1.25	10.90	12.10	13.30	14.80	16.60	18.60	21.00	23.70	26.80	30.40
1.50	7.00	7.50	8.20	9.00	9.90	11.00	12.30	13.90	15.70	17.90
1.75	4.90	5.20	5.50	5.90	6.50	7.10	7.80	8.70	9.80	11.10
2.00	3.70	3.90	4.00	4.30	4.50	4.90	5.30	5.80	6.50	7.30
2.25	3.00	3.10	3.10	3.30	3.40	3.60	3.80	4.10	4.50	5.00
2.50	2.50	2.50	2.60	2.60	2.70	2.80	2.90	3.10	3.30	3.60
2.75	2.20	2.10	2.20	2.20	2.20	2.30	2.30	2.40	2.60	2.70
3.00	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	2.00	2.10	2.20
3.25	1.70	1.70	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60
3.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50
3.75	1.40	1.40	1.40	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30
4.00	1.30	1.30	1.30	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20