

2º Ingeniero Técnico Industrial – Mecánica y Electricidad

Asignatura: **Técnicas estadísticas de control de la producción**

Profesora: Miren Portilla

Curso 2004-2005

Tema 1: Control Estadístico de Procesos

Lección 1: GRÁFICOS DE VARIABLES

CALIDAD

CONCEPTO:

« La calidad del producto se define como aquellas cualidades que caracterizan la aptitud del producto para su uso. »

El que un producto se considere o no como producto de calidad depende de si cumple o no las funciones para las que fue concebido.

DEFINICION:

« La totalidad de las características o rendimientos propios que son objeto de evaluación para determinar si un producto o servicio satisface o no las finalidades de su uso. »

La calidad del producto no está en absoluto limitada a los productos industriales, y el concepto puede aplicarse con toda amplitud a las compañías aéreas, hospitales, bancos y otras empresas del sector de servicios.

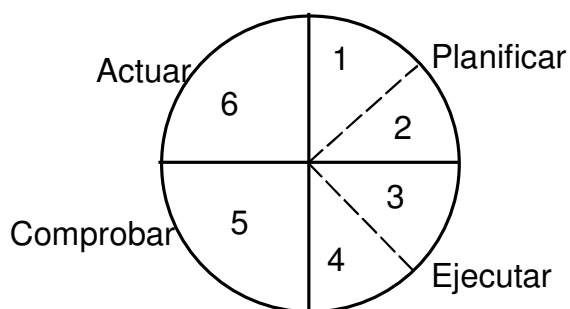
CONTROL

CONCEPTO:

« La totalidad de los medios con los que se establecen y logran las normas. »

CÍRCULO DE CONTROL:

El control es un ciclo continuo que empieza y acaba en la planificación.



Los elementos del círculo de control son:

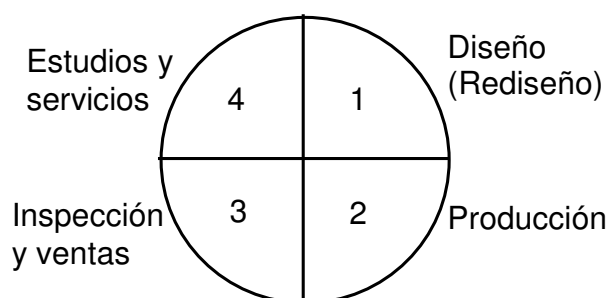
- 1: Establecimiento de un plan o estándar para lograr el objetivo.
- 2: Determinación de métodos para alcanzar las metas.
- 3: Formación y capacitación del personal.
- 4: Realización o ejecución del plan.
- 5: Medición y análisis de los resultados, comprobación.
- 6: Realización de las reformas necesarias cuando los resultados no son los planeados originalmente.

CONTROL DE CALIDAD

Al añadir la palabra "calidad" a la definición anterior de control, encontramos que control de calidad es:

“El conjunto de todos los medios por los que establecemos y alcanzamos el estándar de calidad.”

El control de calidad abarca todos los pasos precisos para formular y conseguir los planes de calidad.



El círculo de Demming

“El control estadístico de calidad es la aplicación de los principios y técnicas estadísticas en todas las fases de la producción, dirigida a la fabricación más económica de un producto que es útil en grado máximo y que tiene mercado.”

HERRAMIENTAS DE CONTROL DE CALIDAD

- **Control Estadístico de Procesos:**

Es el medio básico utilizado en procesos en línea con el fin de fabricar el producto correctamente desde el principio.

Analiza la calidad durante la producción.

Es la herramienta más habitual y extendida.

- **Muestreo por aceptación:**

Es un procedimiento de inspección con el propósito de proceder a la aceptación o rechazo de un producto basándose en la conformidad respecto a un estándar.

Normalmente es utilizado en el momento de inspección inicial.

- **Diseño de Experimentos:**

Un experimento diseñado es un procedimiento en el que se varían sistemáticamente los factores controlables de entrada y se estudia el efecto en los parámetros de salida del producto. El objetivo es descubrir los factores clave que influyen en las características de calidad de interés en el proceso.

Importante en actividades de desarrollo y en primeras etapas de fabricación.

CONCEPTO DE PROCESO

El término “Proceso” se utiliza como una combinación de máquinas, herramientas, métodos, materiales y personas empleadas para obtener una calidad especificada para un determinado producto o servicio.

La función de cada uno de estos elementos puede ser relativamente simple o sumamente compleja. En cada uno de ellos hay una **variabilidad inherente o natural**, cuyas causas no se pueden individualizar, junto con una variabilidad no natural que sí se puede controlar.

Cuando decimos que un proceso está «**bajo control**», queremos indicar que la variabilidad que se observa es únicamente la que llamamos inherente o natural.

El control de la calidad de los materiales, lotes, piezas y conjuntos durante el curso de la fabricación es una de las actividades más importantes de la gestión de la calidad. La herramienta estadística más ampliamente utilizada para este fin es el **gráfico de control**.

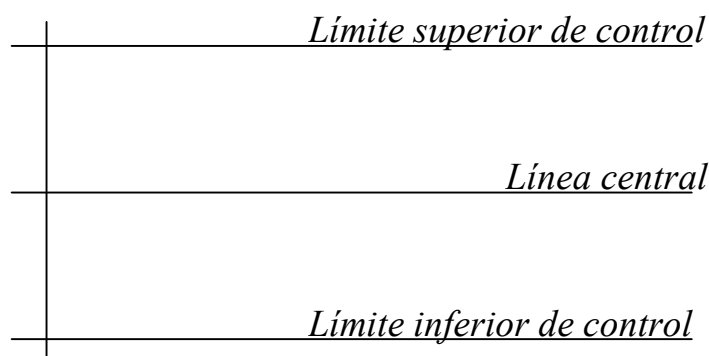
GRAFICO DE CONTROL

"La comparación gráfica y cronológica (cada hora, día, etc.) de las características de calidad del producto con unos límites que reflejan la capacidad, basada en la experiencia pasada, para fabricar dicho producto".

Esta comparación normalmente se realiza seleccionando y midiendo muestras de la producción y en muy raras ocasiones realizado éste examen en cada una de las piezas o conjuntos producidos (selección 100%).

Los gráficos de control reflejan las fluctuaciones (variabilidad) de la producción comparándose con unos límites de control estadísticamente establecidos.

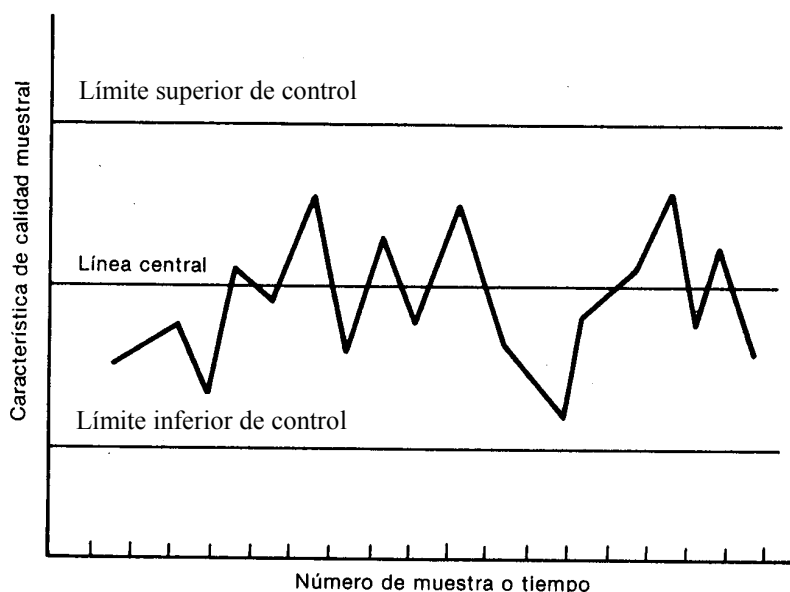
Los problemas de calidad aparecen, normalmente, cuando un proceso se desvía de su trayectoria habitual. En este sentido el gráfico de control permite, por el conocimiento de los límites de control, saber cuando un proceso empieza a alterarse ofreciendo la posibilidad de corregirlo antes de que empiecen a producirse piezas defectuosas.



FORMA DE UN GRÁFICO DE CONTROL

Un gráfico de control tiene la intención de ser un dispositivo para detectar el estado no aleatorio o fuera de control de un proceso.

Hay distintos tipos de gráficos de control referidos a distintas pautas de variabilidad. Pero todos tienen unas características comunes y se interpretan de la misma manera.



El gráfico tiene una **línea central** que representa el valor medio de la característica de calidad, correspondiente al estado bajo control. Hay también otras dos líneas horizontales, llamadas **Límite Superior de Control (LSC)** y **Límite Inferior de Control (LIC)**.

VENTAJAS DEL USO DEL GRÁFICO DE CONTROL

Los diagramas de control han tenido un largo historial de uso en las industrias. Hay por lo menos cinco razones para ello:

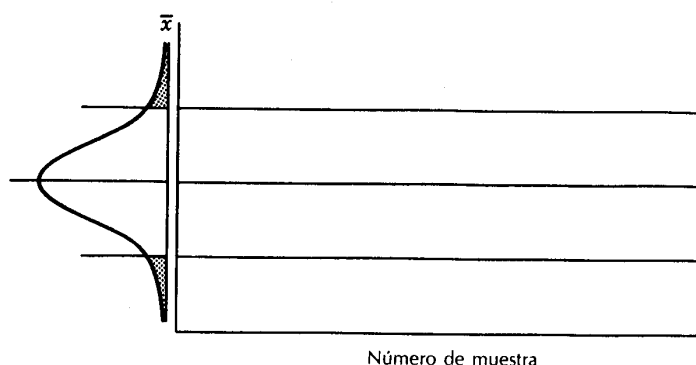
- 1 **Los diagramas de control son una técnica probada para mejorar la productividad.** Un exitoso programa de diagramas de control reducirá el rechazo y la reelaboración, que son los principales problemas en la productividad. Reduciendo el rechazo y la reelaboración, la productividad aumenta, los costos disminuyen y la capacidad de la producción aumenta.
- 2 **Los diagramas de control son eficaces para evitar defectos.** El diagrama de control ayuda a mantener el proceso bajo control, lo que es congruente con la filosofía de "hacerlo bien desde el principio". Siempre es más costoso separar los artículos "buenos" de los "malos" después de su fabricación, que hacerlos correctamente desde el principio.
- 3 **Los diagramas de control evitan ajustes innecesarios al proceso.** Un diagrama puede distinguir entre el ruido de fondo y una variación anormal; ningún otro dispositivo, ni siquiera un operario humano, es tan eficiente. Esto evita los ajustes innecesarios, que son los pueden provocar realmente un deterioro del funcionamiento del proceso.
- 4 **Los diagramas de control proporcionan información para el análisis.** A menudo, el patrón de los puntos en el diagrama de control contiene información diagnóstica para un operario o ingeniero con experiencia. Esta información permite implementar un cambio en el proceso que mejore su rendimiento.
- 5 **Los diagramas de control proporcionan información acerca de la capacidad del proceso.** La gráfica de control ofrece información sobre el valor de parámetros importantes del proceso y de su estabilidad en el tiempo. Esto permite estimar la capacidad del proceso. Dicha información es de gran utilidad para los diseñadores de productos y procesos.

GRÁFICO DE CONTROL Y PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Los gráficos de control son en realidad una **prueba de hipótesis estadística**:

En cada una de las muestras se calcula el estadístico a controlar y si

- el valor se ubica entre los límites de control, es equivalente a no poder rechazar la hipótesis estadística.
- el valor se encuentra fuera de los límites equivale al rechazo de la hipótesis.



En uno y otro caso cabe la posibilidad de error:

Probabilidad de cometer error de tipo I:

$$\alpha = P(\text{rechazar cuando es cierta la hipótesis})$$

$$= P(\text{avisar que el proceso está fuera de control cuando realmente está bajo control})$$

Probabilidad de cometer error de tipo II:

$$\beta = P(\text{no rechazar cuando la hipótesis es falsa})$$

$$= P(\text{concluir que el proceso está bajo control cuando en realidad no lo está})$$

MODELO GENERAL Y TIPOS DE GRÁFICOS DE CONTROL

Un **MODELO GENERAL** para el diagrama de control es el siguiente:

Sea W una estadística muestral que mide alguna característica de calidad de interés. Sea μ_w la media de W , y su desviación típica σ_w .

Las líneas del diagrama de control serán:

$$LSC = \mu_w + k \sigma_w$$

$$\text{Línea central} = \mu_w$$

$$LIC = \mu_w - k \sigma_w$$

Donde k es la distancia entre los límites de control y la línea central, expresada en desviaciones típicas. Esta teoría fue propuesta por primera vez por el Dr. Walter A. Shewhart. Las gráficas, desarrolladas según estos principios se les denominan **diagrama de Shewhart**.

TIPOS según la **característica de calidad** y según el **objeto de control**:

- Diagramas para **variables** (medición sobre un continuo: peso, diámetro, etc.)
 - * Tendencia central: si existe desplazamiento en promedio. Gráfico \bar{X} .
 - * Variabilidad: si cambia la precisión. Gráficos **R** o **S**.
- Diagramas para **atributos** (individuo conforme, es decir, defectuoso o no)
 - * Proporción o número de defectuosos o de defectos.

DIAGRAMAS DE CONTROL PARA VARIABLES

Formación del gráfico de Control \bar{X} :

Análisis de la evolución del promedio de la característica de calidad.

En un gráfico de control para la tendencia central, $W=\bar{X}$, los límites son los siguientes:

$$LSC = \mu_{\bar{x}} + k\sigma_{\bar{x}} = \mu + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Línea central} = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$LIC = \mu_{\bar{x}} - k\sigma_{\bar{x}} = \mu - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ya que si en la población $X \approx N(\mu, \sigma)$, entonces en las muestras $\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Condición para escoger “ k ”: cuando el proceso está bajo control, el $100(1-\alpha)\%$ de los valores de \bar{X} cae dentro de los límites siguientes:

$$LIC = \mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad LSC = \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Usualmente se utilizan límites “tres sigma” ($k=3$): $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 3$ ($\alpha=0,0026$)

siendo α la probabilidad de que el analista determine de manera errónea que el proceso está fuera de control (error de tipo I).

Ejemplo:

Supongamos un proceso de fabricación de una pieza de un motor en el que se conoce que la media del proceso es $\mu = 50$ mm y la desviación estándar es $\sigma = 0,1$ mm. Se quiere realizar un muestreo de 5 piezas cada hora.

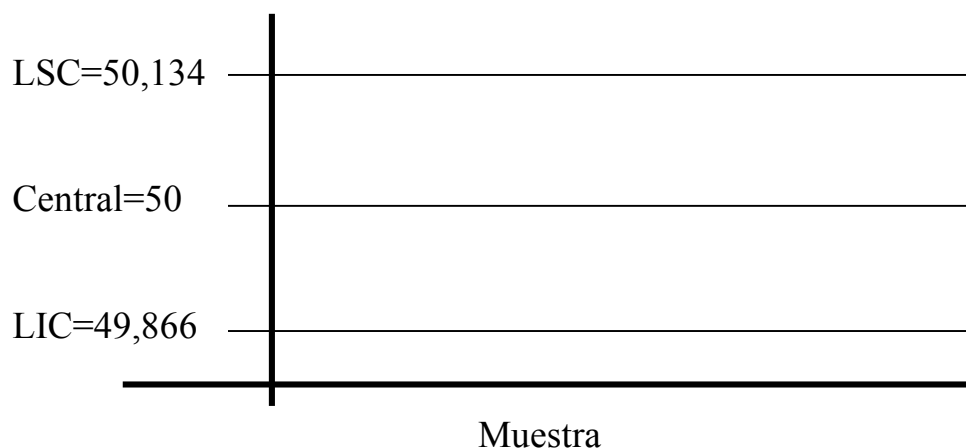
Los límites de control “tres sigma”serán:

$$LSC = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 + 3 \frac{0.1}{\sqrt{5}} = 50,134$$

$$\text{Línea central} = \mu = 50 \text{ mm}$$

$$LIC = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 - 3 \frac{0.1}{\sqrt{5}} = 49,866$$

Con lo que el gráfico de control donde deben representarse las medias muestrales será de la forma siguiente:



Sin embargo lo habitual es desconocer la media y la desviación estándar de la población.

Gráfico \bar{X} con parámetros estimados:

$$\text{LSC} = \hat{\mu} + k \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Línea central} = \hat{\mu}$$

$$\text{LIC} = \hat{\mu} - k \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

La **estimación de la media** de la población será: $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$
 siendo m el número de muestras de n elementos.

Para la estimación de la desviación estándar, se calculan los recorridos muestrales $R_i = X_{max,i} - X_{min,i}$ y, a partir de ellos, la amplitud media del recorrido \bar{R} dada

por:
$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

De ahí (*) la **estimación de la desviación estándar** será: $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$

(*) *Analizando el estadístico rango promedio $w=R/\sigma$ de forma experimental para cada n y variando el valor de σ se obtiene: $\mu(w) = d_2$ $\sigma(w) = d_3$*

Por tanto:
$$d_2 = \mu(w) = \mu\left(\frac{R}{\sigma}\right) = \frac{\mu(R)}{\sigma} \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\hat{\mu}(R)}{d_2} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$d_3 = \sigma(w) = \sigma\left(\frac{R}{\hat{\sigma}}\right) = \frac{\sigma(R)}{\hat{\sigma}} = \frac{\sigma_R}{\hat{\sigma}} \Rightarrow \hat{\sigma}_R = d_3 \hat{\sigma} = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Este estimador es centrado ($\mu(R) = d_2 \sigma$) y es tanto más eficiente cuanto menor es el tamaño de la muestra, como podemos comprobar en la siguiente tabla:

| | | | | | | |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Tamaño muestral n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 |
| Eficiencia relativa | 1,000 | 0,992 | 0,975 | 0,955 | 0,930 | 0,850 |

Diagrama de control \bar{X} :

$$\text{LSC} = \bar{\bar{x}} + \frac{k}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$$

$$\text{Línea central} = \bar{\bar{x}}$$

$$\text{LIC} = \bar{\bar{x}} - \frac{k}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$$

Para $k=3$, si denominamos $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$

(es una cantidad constante que depende solamente del tamaño de la muestra) es posible poner los límites de la forma:

$$\text{LSC} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$

$$\text{Línea Central} = \bar{\bar{x}}$$

$$\text{LIC} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

Los valores de d_2 y A_2 vienen tabulados para distintos valores de n , como puede verse en las tablas de la página siguiente.

Tablas

| Tamaño muestral n | $d_2 = \bar{R}/\sigma$ | $c_2 = \bar{S}/\sigma$ | $d_3 = \sigma_R/\sigma$ | $c_3 = \sigma_S/\sigma$ |
|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 2 | 1,128 | 0,5642 | 0,853 | 0,4642 |
| 3 | 1,693 | 0,7236 | 0,888 | 0,3782 |
| 4 | 2,059 | 0,7979 | 0,880 | 0,3367 |
| 5 | 2,326 | 0,8407 | 0,864 | 0,3053 |
| 6 | 2,534 | 0,8686 | 0,848 | 0,2808 |
| 7 | 2,704 | 0,8882 | 0,833 | 0,2612 |
| 8 | 2,847 | 0,9027 | 0,820 | 0,2452 |
| 9 | 2,970 | 0,9139 | 0,808 | 0,2317 |
| 10 | 3,078 | 0,9227 | 0,797 | 0,2205 |

Tabla para calcular los parámetros de los diagramas de control de características variables de calidad

| Tamaño muestral n | Gráfico \bar{X} Límites de control | | Gráfico S Límites de control | | Gráfico R Límites de control | |
|------------------------|---|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| | A_1 | A_2 | B_3 | B_4 | D_3 | D_4 |
| 2 | 3,760 | 1,880 | 0 | 3,468 | 0 | 3,267 |
| 3 | 2,394 | 1,023 | 0 | 2,568 | 0 | 2,575 |
| 4 | 1,880 | 0,729 | 0 | 2,266 | 0 | 2,282 |
| 5 | 1,596 | 0,577 | 0 | 2,089 | 0 | 2,115 |
| 6 | 1,410 | 0,483 | 0,030 | 1,970 | 0 | 2,004 |
| 7 | 1,277 | 0,419 | 0,118 | 1,882 | 0,076 | 1,924 |
| 8 | 1,175 | 0,373 | 0,185 | 1,815 | 0,136 | 1,864 |
| 9 | 1,094 | 0,337 | 0,239 | 1,761 | 0,184 | 1,816 |
| 10 | 1,028 | 0,308 | 0,284 | 1,716 | 0,233 | 1,777 |

Diagrama de control de R

El diagrama para controlar la variabilidad mediante los rangos muestrales será:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \hat{\mu}_R + k\hat{\sigma}_R \\ \text{Línea central} &= \hat{\mu}_R \\ \text{LIC} &= \hat{\mu}_R - k\hat{\sigma}_R \end{aligned}$$

Y analizando el recorrido o rango promedio $W = R/\sigma$ tenemos que:

- la estimación de la media para línea central será $\bar{R} = \hat{\mu}_R$.
- para la desviación típica la estimación viene dada por: $\hat{\sigma}_R = d_3\hat{\sigma} = d_3\frac{\bar{R}}{d_2}$

Luego los límites de control “tres sigma” quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} \\ \text{Línea Central} &= \bar{R} \\ \text{LIC} &= \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} \end{aligned}$$

Si se toma

$$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2} \qquad D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$$

Los límites serán:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \bar{R}D_4 \\ \text{Línea Central} &= \bar{R} \\ \text{LIC} &= \bar{R}D_3 \end{aligned}$$

Los valores de d_2 , d_3 , D_3 y D_4 vienen tabulados para distintos valores de n , como puede verse en las tablas de la página anterior.

Ejemplo:

Se controla un proceso de fabricación de partes componentes para misiles, con la resistencia a la tensión, en libras por pulgada cuadrada, como característica de comportamiento. Se toman 25 muestras de tamaño 5 cada hora. Los datos obtenidos son los de la tabla siguiente:

| Muestra | Observaciones | | | | | Media muestral | Rango muestral |
|---------|---------------|------|------|------|------|----------------|----------------|
| 1 | 1515 | 1518 | 1512 | 1498 | 1511 | 1510,8 | 20 |
| 2 | 1504 | 1511 | 1507 | 1499 | 1502 | 1504,6 | 12 |
| 3 | 1517 | 1513 | 1504 | 1521 | 1520 | 1515,0 | 17 |
| 4 | 1497 | 1503 | 1510 | 1508 | 1502 | 1504,0 | 13 |
| 5 | 1507 | 1502 | 1497 | 1509 | 1512 | 1505,4 | 15 |
| 6 | 1519 | 1522 | 1523 | 1517 | 1511 | 1518,4 | 12 |
| 7 | 1498 | 1497 | 1507 | 1511 | 1508 | 1504,2 | 14 |
| 8 | 1511 | 1518 | 1507 | 1503 | 1509 | 1509,6 | 15 |
| 9 | 1506 | 1503 | 1498 | 1508 | 1506 | 1504,2 | 10 |
| 10 | 1503 | 1506 | 1511 | 1501 | 1500 | 1504,2 | 11 |
| 11 | 1499 | 1503 | 1507 | 1503 | 1501 | 1502,6 | 8 |
| 12 | 1507 | 1503 | 1502 | 1500 | 1501 | 1502,6 | 7 |
| 13 | 1500 | 1506 | 1501 | 1498 | 1507 | 1502,4 | 9 |
| 14 | 1501 | 1509 | 1503 | 1508 | 1503 | 1504,8 | 8 |
| 15 | 1507 | 1508 | 1502 | 1509 | 1501 | 1505,4 | 8 |
| 16 | 1511 | 1509 | 1503 | 1510 | 1507 | 1508,0 | 8 |
| 17 | 1508 | 1511 | 1513 | 1509 | 1506 | 1509,4 | 7 |
| 18 | 1508 | 1509 | 1512 | 1515 | 1519 | 1512,6 | 11 |
| 19 | 1520 | 1517 | 1519 | 1522 | 1516 | 1518,8 | 6 |
| 20 | 1506 | 1511 | 1517 | 1516 | 1508 | 1511,6 | 11 |
| 21 | 1500 | 1498 | 1503 | 1504 | 1508 | 1502,6 | 10 |
| 22 | 1511 | 1514 | 1509 | 1508 | 1506 | 1509,6 | 8 |
| 23 | 1505 | 1508 | 1500 | 1509 | 1503 | 1505,0 | 9 |
| 24 | 1501 | 1498 | 1505 | 1502 | 1505 | 1502,2 | 7 |
| 25 | 1509 | 1511 | 1507 | 1500 | 1499 | 1505,2 | 12 |

Los resultados obtenidos y límites de los gráficos \bar{X} y R son los siguientes:

Gráfico R: Línea central: $\bar{R} = 10,72$

$$LIC = \bar{R}D_3 = (10,72)(0) = 0 \quad LSC = \bar{R}D_4 = (10,72)(2,115) = 22,6728$$

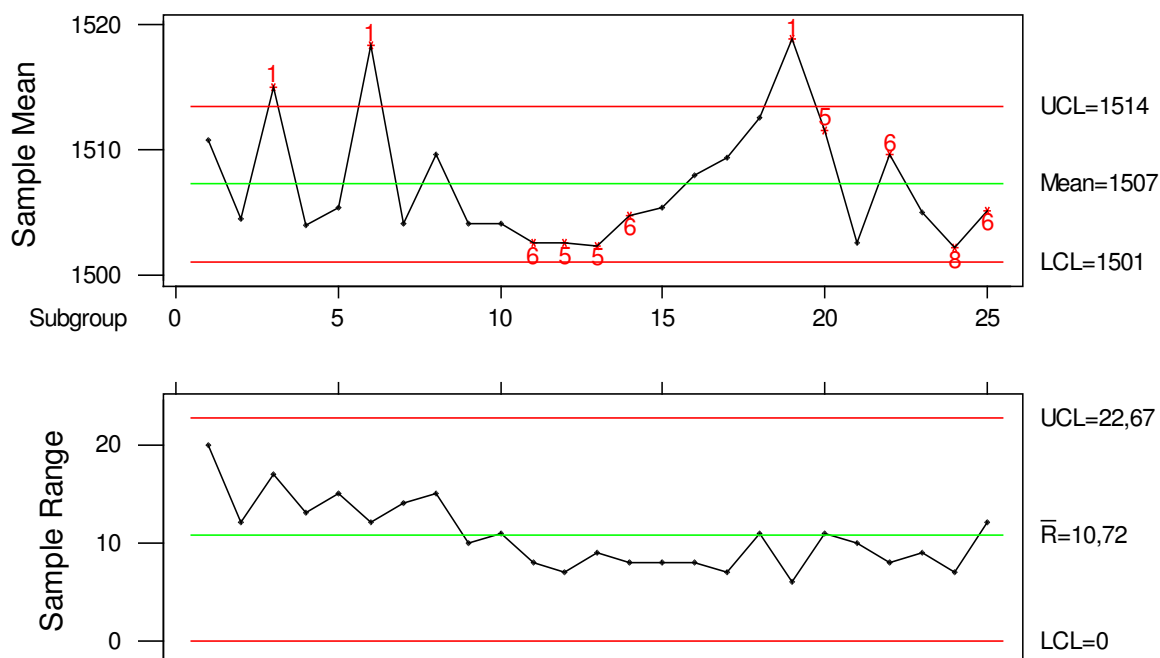
Gráfico \bar{X} : Línea central: $\bar{x} = 1507,328$

$$LSC = \bar{x} + A_2 \bar{R} = 1507,328 + (0,577)(10,72) = 1513,5134$$

$$LIC = \bar{x} - A_2 \bar{R} = 1507,328 - (0,577)(10,72) = 1501,1426$$

Resultados de gráficos de control con MINITAB (fichero **misiles.MTW**):

Xbar/R Chart for resist1-resist5



ANOMALÍAS EN LOS GRÁFICOS DE CONTROL (MINITAB)

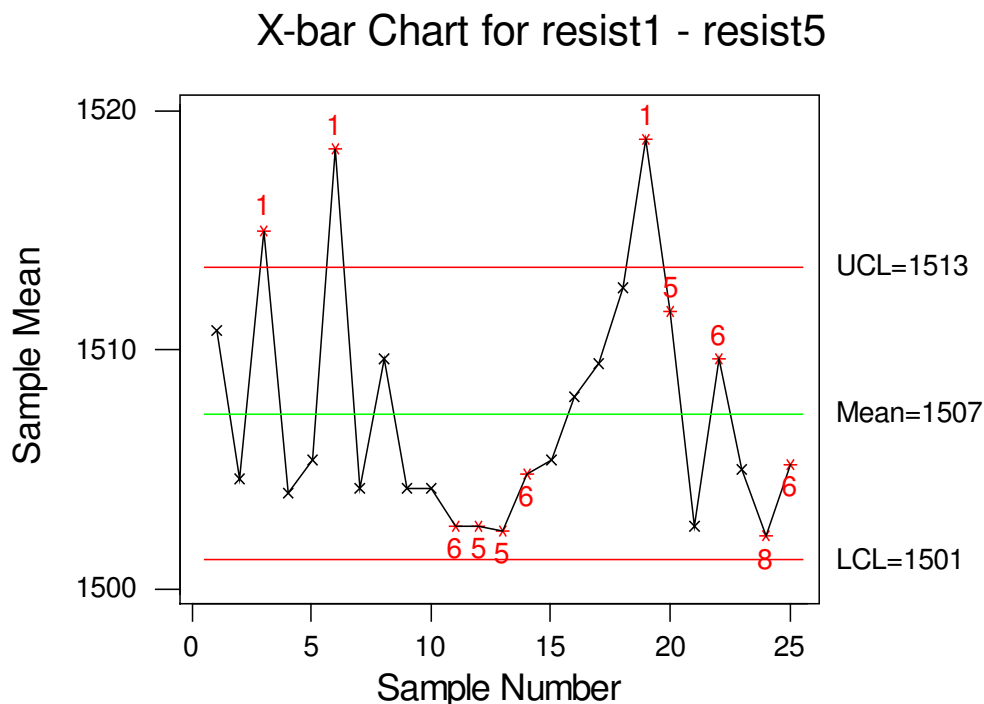
1. Uno o más puntos están fuera de los límites de control de tres sigmas.
2. Una racha de por lo menos 9 puntos consecutivos en el mismo lado de la línea central.
3. Una racha de por lo menos 6 puntos, todos crecientes o todos decrecientes.
4. Al menos 14 puntos consecutivos, alternando arriba y abajo.
5. De tres puntos consecutivos, dos se encuentran a más de dos sigmas de la línea central y en el mismo lado.
6. De cinco puntos consecutivos, cuatro se encuentran a más de una desviación típica (sigma) de la línea central y en el mismo lado.
7. Una racha de por lo menos 15 puntos consecutivos dentro de los límites sigma, a ambos lados.
8. Una racha de por lo menos 8 puntos consecutivos más allá de los límites sigma, a ambos lados.

Gráficos \bar{X} : 8 tests.

Gráficos R (y S): los 4 primeros tests.

Ejemplo:

Resultados del gráfico de control \bar{X} con MINITAB (fichero **misiles.MTW**):



Test Results for Xbar Chart

TEST 1. One point more than 3,00 sigmas from center line.
 Test Failed at points: 3 6 19

TEST 3. 6 points in a row all increasing or all decreasing.
 Test Failed at points: 19

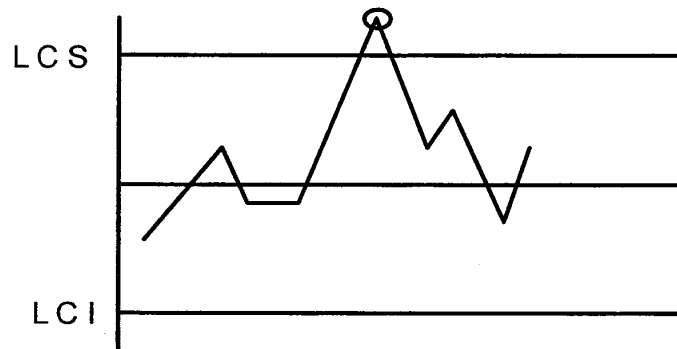
TEST 5. 2 out of 3 points more than 2 sigmas from center line
 (on one side of CL).
 Test Failed at points: 12 13 19 20

TEST 6. 4 out of 5 points more than 1 sigma from center line
 (on one side of CL).
 Test Failed at points: 11 12 13 14 20 22 25

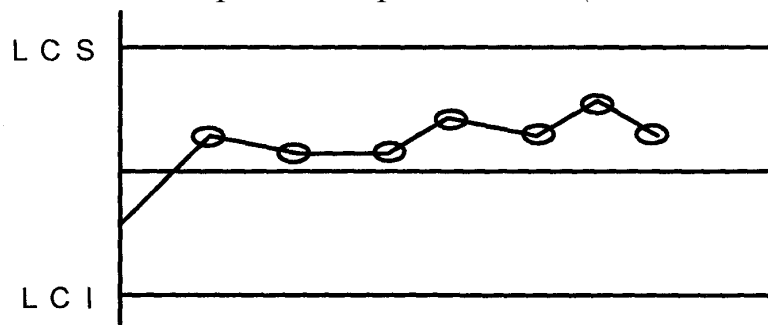
TEST 8. 8 points in a row more than 1 sigma from center line
 (above and below CL).
 Test Failed at points: 13 14 24 25

ANOMALÍAS: CAUSAS Y EFECTOS

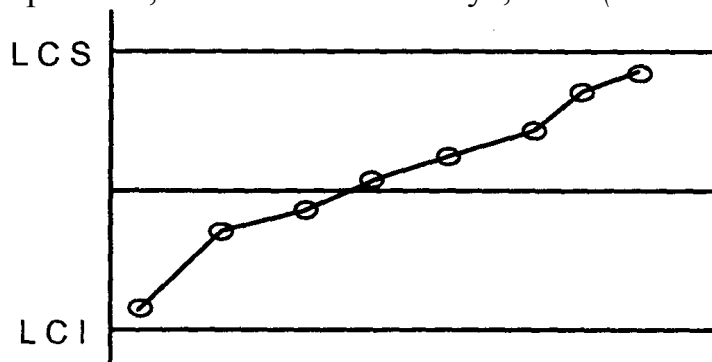
- **Un punto fuera de los límites de control:** Principal señal de falta de control. Se rechaza la hipótesis nula de estabilidad del proceso: se ha modificado el parámetro poblacional. *(test 1 de Minitab)*



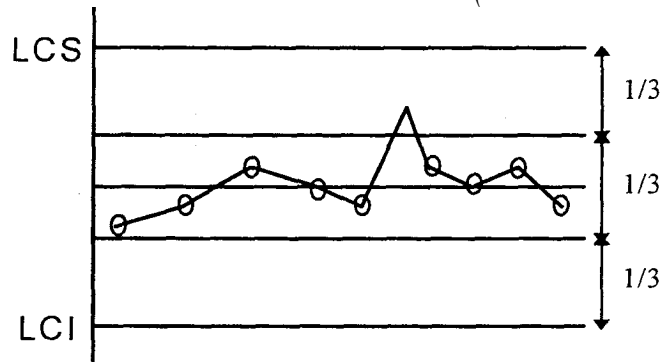
- **Una racha de siete o más puntos a un lado de la línea central:** Señal de aumento o disminución del parámetro poblacional. *(test 2 de Minitab, 9 puntos)*



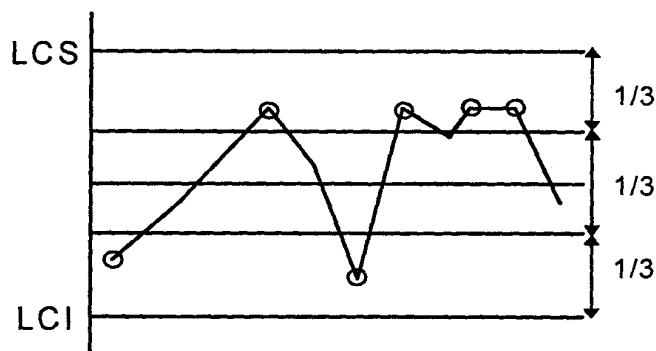
- **Tendencia creciente o decreciente:** Algo genera una inestabilidad continua en el tiempo como por ejemplo, una máquina o herramienta sufre desgaste, el cansancio de operarios, una solución se diluye, etc. *(test 3 de Minitab, 6 puntos)*



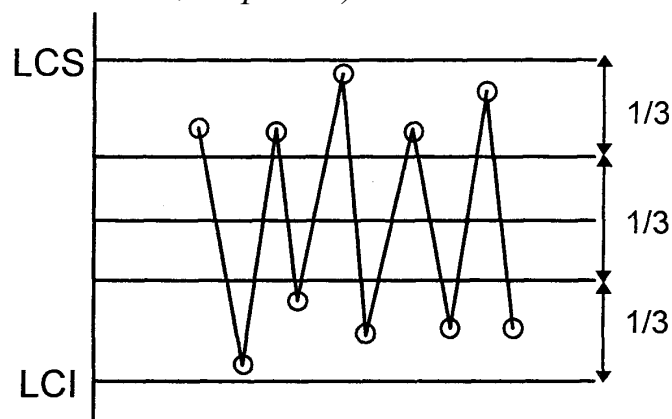
- **Acumulación de puntos en el tercio central (Más de dos tercios de puntos a menos de 1 desviación típica de la línea central):** Probablemente se han mantenido los límites durante demasiado tiempo y ya no se refleja la disminución de la dispersión (variabilidad). O bien el instrumento de medida no refleja correctamente valores “extremos”. *(test 7 de Minitab, 15 puntos)*



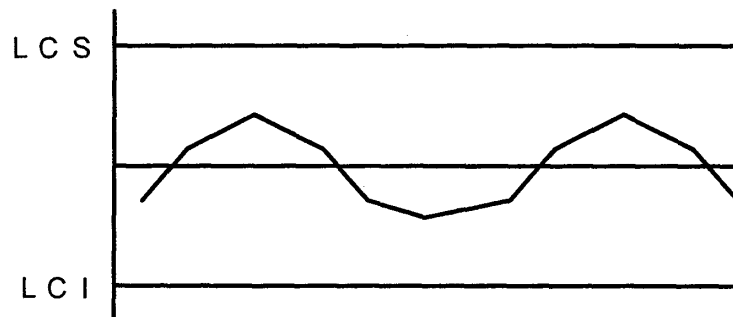
- **Acumulación de puntos cerca de los Límites de Control (Más de un tercio de los puntos a más de 1 desviación típica de la línea central):** Suele ser originado por una mezcla de producciones de dos o más máquinas. *(similar al test 8 de Minitab, 8 puntos)*



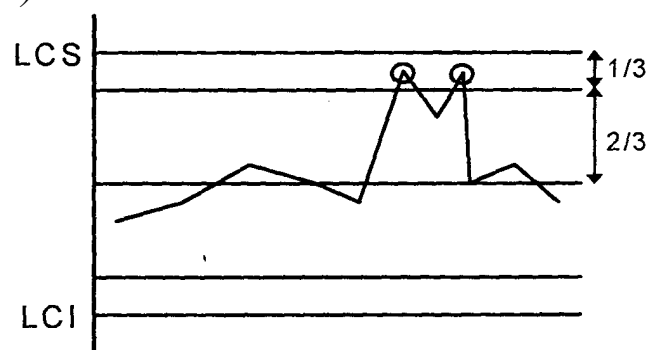
- **Dientes de sierra:** Es un caso exagerado de la señal anterior, pero se debe frecuentemente a un sobrecontrol, demasiadas regulaciones innecesarias de la máquina. *(test 4 de Minitab, 14 puntos)*



- **Ciclos:** Esta señal de alarma suele producirse por causas de variación cíclicas como turnos de trabajo, cambios de temperatura o humedad ambiental, on-off de un automatismo, etc.



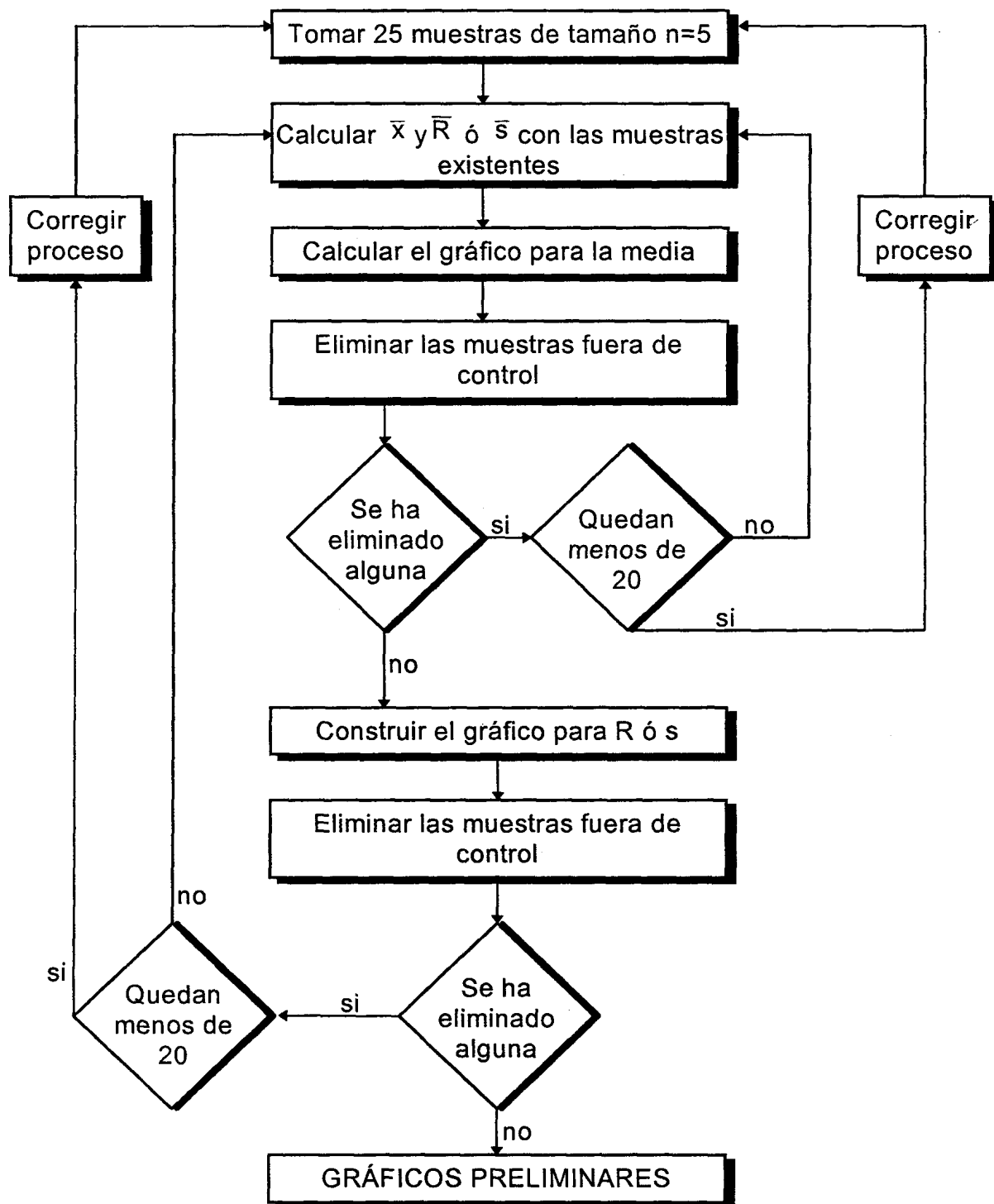
- **Dos puntos de tres consecutivos en la zona de atención (a más de dos desviaciones típicas):** Es una señal de alarma ya que si el proceso estuviera bajo control en esta zona se situarían aproximadamente un 5% de puntos y la probabilidad de que se sitúen dos de tres consecutivos es de 2,3 por mil. *(test 5 de Minitab)*



Caso de que el proceso no sea estable:

- 1 - Iniciar un período base de al menos 25 muestras (generalmente $n \leq 10$).
- 2 – Calcular $\bar{\bar{X}}$ y \bar{R} y los límites de control.
- 3 – Revisar el gráfico R. Si todas las observaciones caen dentro de los límites de control ir al paso 4. Si hay observaciones que están fuera del límite superior de control eliminar las muestras correspondientes del período base e ir al paso 2.
- 4 – Revisar el gráfico \bar{X} . Si todas las observaciones caen dentro de los límites de control ir al paso 5. Si hay observaciones fuera de los límites de control, eliminar la muestra correspondiente del período base. Si quedan 15 muestras o menos, prescindir del período base. En caso contrario ir al paso 2.
- 5 – Extender los límites de control al período de vigilancia.

Proceso de construcción de Gráficos de Control iniciales



FUNCIÓN CARACTERÍSTICA OPERATIVA (Gráfica \bar{X})

En la construcción de los gráficos de control se ha asumido la normalidad en los datos por lo que la distribución de \bar{X} también es normal.

Además un gráfico de control es básicamente un contraste o prueba de hipótesis, luego debemos controlar dos errores asociados a dichas pruebas:

Error tipo I = rechazar la hipótesis nula cuando es cierta

decir que el proceso está fuera de control cuando en realidad no lo está
“falsa alarma”

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{falsa alarma})$$

Vimos que $k = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, en concreto si $k=3$, entonces $\alpha = 0,0026$.

Nota: si la distribución no fuera normal, α sería una aproximación solamente y además fallaría la eficiencia de las estimaciones de σ .

Error tipo II = aceptar la hipótesis nula cuando es falsa

decir que el proceso está bajo control cuando en realidad no lo está
“no detección”

$$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{no detección})$$

Se denomina **potencia** de la prueba estadística o **función característica operativa** a $1-\beta$, es decir, a la probabilidad de detectar cuando está el proceso fuera de control.

A β se le denomina riesgo.

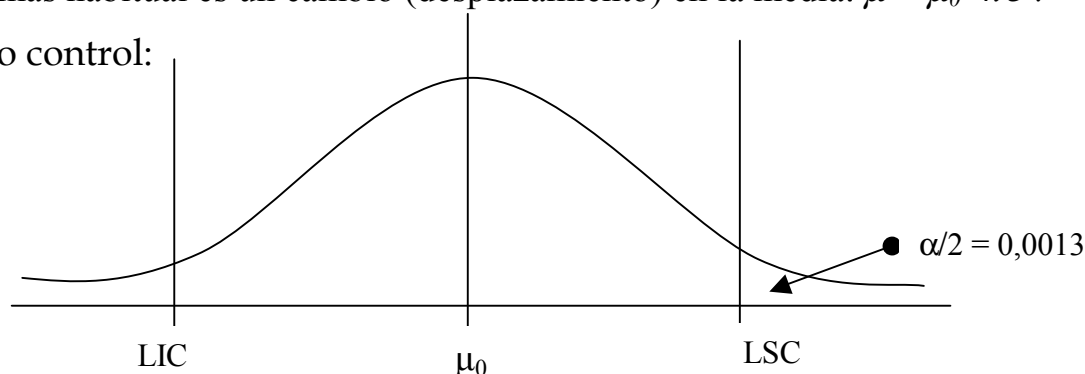
Veamos el caso de la función característica operativa para el gráfico de control \bar{X} .

Supongamos conocidos LSC y LIC de la gráfica \bar{X} con $X \approx N(\mu_0, \sigma)$, σ constante y estado bajo control de media μ_0 .

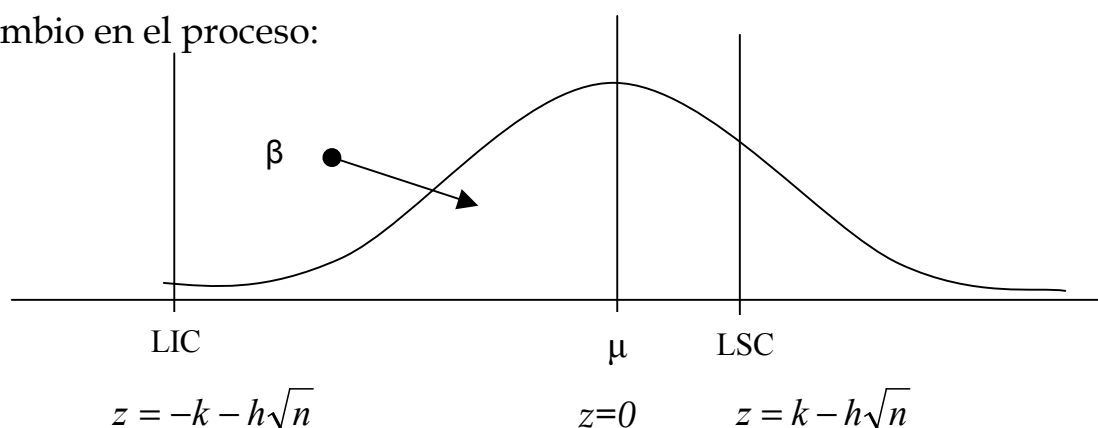
El riesgo β (probabilidad de error de tipo II) es la probabilidad de que un valor de \bar{X} permanezca dentro de los límites de control cuando, en realidad, se ha producido un cambio en el proceso ($X \approx N(\mu', \sigma')$)

Lo más habitual es un cambio (desplazamiento) en la media: $\mu = \mu_0 + h\sigma$.

Bajo control:



Cambio en el proceso:



$$\begin{aligned} \beta &= P[LIC \leq \bar{X} \leq LSC | \mu = \mu_0 + h\sigma] = \\ &= P\left[Z \leq \frac{LSC - (\mu_0 + h\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} \right] - P\left[Z \leq \frac{LIC - (\mu_0 + h\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} \right] = \\ &= P\left[Z \leq \frac{\mu_0 + k\sigma/\sqrt{n} - (\mu_0 + h\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} \right] - P\left[Z \leq \frac{\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n} - (\mu_0 + h\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} \right] = \\ &= P(Z \leq k - h\sqrt{n}) - P(Z \leq -k - h\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Notemos que la probabilidad β de no detectar un desplazamiento $h\sigma$ en la media, en la primera muestra a partir del desplazamiento, aumenta cuando k aumenta pero disminuye cuando h o n aumentan, es decir:

- A límites más amplios (k aumenta), mayor riesgo de no detectar (β aumenta)
- Si la media se desplaza mucho (h aumenta), hay menor riesgo (β disminuye)
- A mayores muestras (n aumenta), menor riesgo de no detectar (β disminuye)

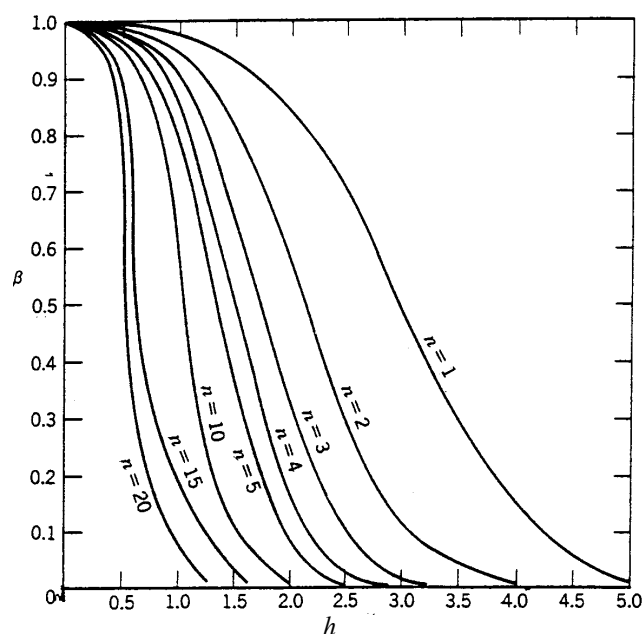
Ejemplo: Supongamos una muestra de tamaño 4 con límites de control 3σ .

$$\beta = P(Z \leq k - h\sqrt{n}) - P(Z \leq -k - h\sqrt{n}) = P(Z \leq 3 - 2h) - P(Z \leq -3 - 2h)$$

Para $h=1$: $\beta = P[Z < 1] - P[Z < -5] = 0,8413$

Y para $h=2$: $\beta = P[Z < -1] - P[Z < -7] = 0,1587$

La curva CO para $k=3$ y distintos valores de n y h tiene la forma:



Si el muestreo se realiza con frecuencia, la probabilidad puede no ser tan importante como el número promedio de muestras necesarias para detectar el desplazamiento de la media: es lo que recoge la longitud media de racha (ver página siguiente).

LONGITUD DE RACHA

Llamamos **longitud de racha** L al número de muestras observadas hasta que se produce el primer aviso de desplazamiento de la media.

Cuando las primeras $j-1$ muestras no dan aviso y éste se produce en la muestra j , la longitud de racha es $L=j$.

Si además los sucesivos valores del estadístico de control son independientes, la distribución de la longitud de racha es una distribución geométrica:

$$P(X = j) = q^{j-1} p$$

donde $p=P(\text{éxito})=P(\text{detectar un aviso, un valor fuera de control})$

$q=1-p=P(\text{fracaso})=P(\text{valor dentro de los límites de control})$

Luego la distribución de la longitud de racha L viene definida por $P(L = j) = (1 - p)^{j-1} p$ con p la probabilidad de detectar un aviso, es decir, un valor fuera de los límites de control.

Y el número esperado de muestras que se requieren para la detección se denomina **Longitud Media de Racha** y viene dada por:

$$LMR = E(L) = \mu(L) = \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} p = \frac{1}{p}$$

- Si el **proceso está bajo control**, es decir, si no hay desplazamiento ($h=0$), la longitud media de racha hasta que se produce el primer aviso será:

$$LMR(0) = E(L_0) = \frac{1}{\alpha}$$

Con α la probabilidad de error de tipo I, es decir, la probabilidad de que una muestra caiga fuera de los límites de control cuando en realidad el proceso está bajo control, que viene dada por:

$$\frac{\alpha}{2} = P\left(Z \leq \frac{\mu_0 - k\sigma / \sqrt{n} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = P(Z \leq -k)$$

- Mientras que si el **proceso ha sufrido un desplazamiento** de $h\sigma$ en la media, la

longitud media de racha será: $LMR(h) = E(L_h) = \frac{1}{1 - \beta}$

con $\beta = P(Z \leq k - h\sqrt{n}) - P(Z \leq -k - h\sqrt{n})$

Ejemplo: Supongamos una muestra de tamaño 4 con límites de control 3σ .

$LMR(0) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0026} = 384,62$, es decir, cuando el proceso está bajo control se necesitan 384,62 muestras, en media, para que un valor esté fuera de los límites.

$LMR(1) = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - 0,8413} = 6,29$, es decir, si la media se desplaza una desviación típica, se requieren 6,29 muestras para detectar el cambio, en promedio.

$LMR(2) = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - 0,1587} = 1,19$, es decir, si la media se desplaza dos desviaciones típicas se requieren en promedio 1,19 muestras para detectar el cambio.

GRÁFICO DE CONTROL \bar{X}, S

Definimos la varianza muestral como:
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

S es una variable aleatoria cuyo valor esperado es $\mu(S) = c_2\sigma$ y desviación típica $\sigma_S = c_3\sigma = c_3 \frac{\bar{S}}{c_2}$, ya que, de forma análoga al análisis del Rango de la página 13,

analizando el estadístico $w = \frac{S}{\sigma}$ de forma experimental para cada n y variando el valor de σ se obtiene: $\mu(w) = c_2$ $\sigma(w) = c_3$

Por tanto: $c_2 = \mu(w) = \mu\left(\frac{S}{\sigma}\right) = \frac{\mu(S)}{\sigma} \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\hat{\mu}(S)}{c_2} = \frac{\bar{S}}{c_2}$

$$c_3 = \sigma(w) = \sigma\left(\frac{S}{\hat{\sigma}}\right) = \frac{\sigma(S)}{\hat{\sigma}} \Rightarrow \hat{\sigma}(S) = c_3 \hat{\sigma} = c_3 \frac{\bar{S}}{c_2}$$

La varianza es un estimador de σ más eficiente para muestras grandes ($n > 10$) ya que la eficiencia del rango como estimador de σ disminuye al aumentar el tamaño muestral.

El **diagrama S** tendrá por tanto las siguientes líneas:

$$\text{LSC} = \bar{S} + k \hat{\sigma}_S = \bar{S} \left(1 + k \frac{c_3}{c_2}\right)$$

$$\text{Central} = \bar{S}$$

$$\text{LIC} = \bar{S} - k \hat{\sigma}_S = \bar{S} \left(1 - k \frac{c_3}{c_2}\right)$$

Dado que habitualmente $k=3$, se definen las constantes:

$$B_3 = \left(1 - 3 \frac{c_3}{c_2}\right) \geq 0 \qquad B_4 = \left(1 + 3 \frac{c_3}{c_2}\right)$$

por lo que los límites de control pueden expresarse de la forma:

$$\text{LSC} = B_4 \bar{S}$$

$$\text{LC} = \bar{S}$$

$$\text{LIC} = B_3 \bar{S}$$

Para el **diagrama** \bar{X} , dado que $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{\bar{S}}{c_2 \sqrt{n}}$, los límites serán:

$$\text{LSC} = \bar{x} + \frac{k\bar{S}}{c_2 \sqrt{n}}$$

$$\text{Central} = \bar{x}$$

$$\text{LIC} = \bar{x} - \frac{k\bar{S}}{c_2 \sqrt{n}}$$

En el caso particular de que $k = 3$, definimos $A_1 = \frac{3}{c_2 \sqrt{n}}$

con lo que en caso de que $k = 3$ los límites quedan:

$$\text{LSC} = \bar{x} + A_1 \bar{S}$$

$$\text{LC} = \bar{x}$$

$$\text{LIC} = \bar{x} - A_1 \bar{S}$$

Los valores de A_1 , B_3 y B_4 están tabulados en la página 15.

Ejemplo: (de página 17, para gráficos de control basados en la desviación típica)

Se controla un proceso de fabricación de partes componentes para misiles, con la resistencia a la tensión, en libras por pulgada cuadrada, como característica de comportamiento. Se toman 25 muestras de tamaño 5 cada hora. Los datos son:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n}}$$

$$S_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n-1}}$$

| Muestra | Observaciones | | | | | Media muestral | Desv. Tip. | DesvTip muestral |
|---------|---------------|------|------|------|------|----------------|------------|------------------|
| 1 | 1515 | 1518 | 1512 | 1498 | 1511 | 1510,8 | 6,85274 | 7,6616 |
| 2 | 1504 | 1511 | 1507 | 1499 | 1502 | 1504,6 | 4,12795 | 4,6152 |
| 3 | 1517 | 1513 | 1504 | 1521 | 1520 | 1515,0 | 6,16441 | 6,8920 |
| 4 | 1497 | 1503 | 1510 | 1508 | 1502 | 1504,0 | 4,60435 | 5,1478 |
| 5 | 1507 | 1502 | 1497 | 1509 | 1512 | 1505,4 | 5,31413 | 5,9414 |
| 6 | 1519 | 1522 | 1523 | 1517 | 1511 | 1518,4 | 4,27083 | 4,7749 |
| 7 | 1498 | 1497 | 1507 | 1511 | 1508 | 1504,2 | 5,63560 | 6,3008 |
| 8 | 1511 | 1518 | 1507 | 1503 | 1509 | 1509,6 | 4,96387 | 5,5498 |
| 9 | 1506 | 1503 | 1498 | 1508 | 1506 | 1504,2 | 3,48712 | 3,8987 |
| 10 | 1503 | 1506 | 1511 | 1501 | 1500 | 1504,2 | 3,96989 | 4,4385 |
| 11 | 1499 | 1503 | 1507 | 1503 | 1501 | 1502,6 | 2,65330 | 2,9665 |
| 12 | 1507 | 1503 | 1502 | 1500 | 1501 | 1502,6 | 2,41661 | 2,7019 |
| 13 | 1500 | 1506 | 1501 | 1498 | 1507 | 1502,4 | 3,49857 | 3,9115 |
| 14 | 1501 | 1509 | 1503 | 1508 | 1503 | 1504,8 | 3,12410 | 3,4928 |
| 15 | 1507 | 1508 | 1502 | 1509 | 1501 | 1505,4 | 3,26190 | 3,6469 |
| 16 | 1511 | 1509 | 1503 | 1510 | 1507 | 1508,0 | 2,82843 | 3,1623 |
| 17 | 1508 | 1511 | 1513 | 1509 | 1506 | 1509,4 | 2,41661 | 2,7019 |
| 18 | 1508 | 1509 | 1512 | 1515 | 1519 | 1512,6 | 4,02989 | 4,5056 |
| 19 | 1520 | 1517 | 1519 | 1522 | 1516 | 1518,8 | 2,13542 | 2,3875 |
| 20 | 1506 | 1511 | 1517 | 1516 | 1508 | 1511,6 | 4,31741 | 4,8270 |
| 21 | 1500 | 1498 | 1503 | 1504 | 1508 | 1502,6 | 3,44093 | 3,8471 |
| 22 | 1511 | 1514 | 1509 | 1508 | 1506 | 1509,6 | 2,72764 | 3,0496 |
| 23 | 1505 | 1508 | 1500 | 1509 | 1503 | 1505,0 | 3,28634 | 3,6742 |
| 24 | 1501 | 1498 | 1505 | 1502 | 1505 | 1502,2 | 2,63818 | 2,9496 |
| 25 | 1509 | 1511 | 1507 | 1500 | 1499 | 1505,2 | 4,83322 | 5,4037 |

$$\bar{\bar{x}} = 1507,328$$

$$\bar{S} = 3,880$$

Por tanto los límites de control para medias y desviaciones vienen dadas por:

| | |
|-----------|---|
| Gráfico | LSC = $\bar{x} + A_1 \bar{S} = 1513,5205$ |
| \bar{X} | LC = $\bar{x} = 1507,328$ |
| | LIC = $\bar{x} - A_1 \bar{S} = 1501,1355$ |

| | |
|---------|-------------------------------|
| Gráfico | LSC = $B_4 \bar{S} = 8,10352$ |
| S | LC = $\bar{S} = 3,88$ |
| | LIC = $B_3 \bar{S} = 0$ |

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n}}$$

Los gráficos de control \bar{X} y S obtenidos con MINITAB para el ejemplo de la página 17 varían en el caso del gráfico S, ya que en este caso los valores que se representan son las desviaciones S_{n-1} obtenidas mediante la cuasivarianza muestral, que es la siguiente:

$$S_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n-1}}$$

por lo que los límites de control de S_{n-1} son diferentes a los del gráfico S:

| | |
|-----------|-----------------------------------|
| Gráfico | LSC = $B_4 \bar{S}_{n-1} = 9,062$ |
| S_{n-1} | LC = $\bar{S}_{n-1} = 4,338$ |
| | LIC = $B_3 \bar{S}_{n-1} = 0$ |

En cambio, los límites de control de \bar{X} y la estimación de σ mediante S_{n-1} , no cambian, pero para calcularlos se utilizan coeficientes distintos a los A_1 , c_2 y c_3 utilizados con S (ver referencias de la bibliografía).

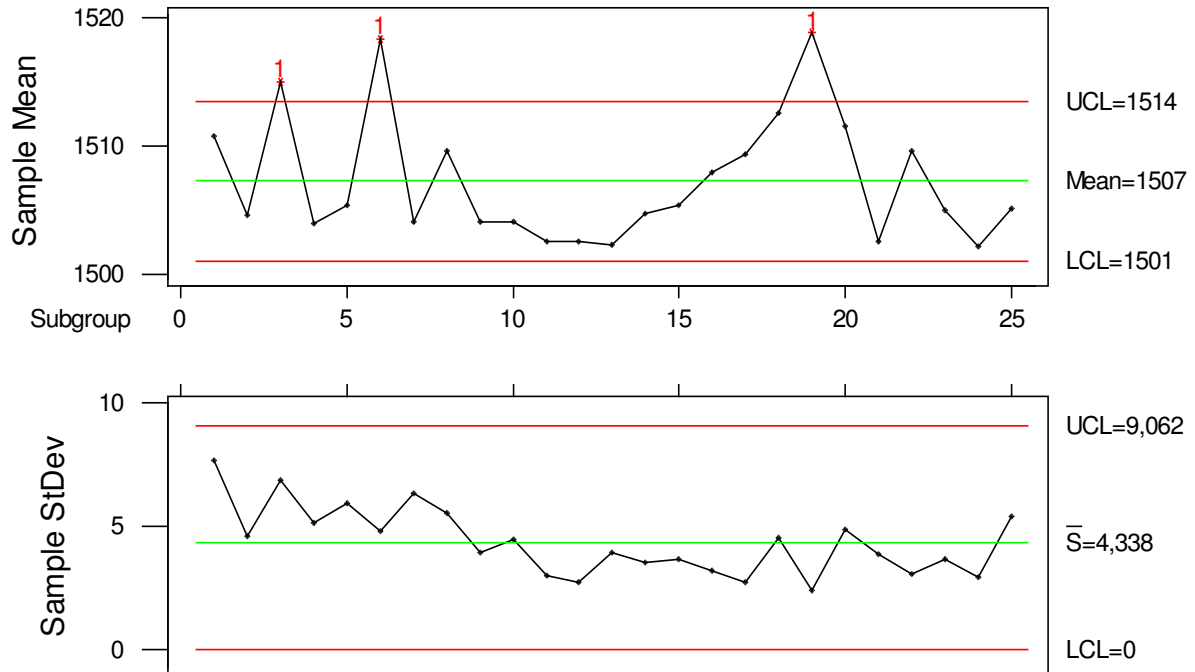
Los resultados de MINITAB son los de la página siguiente:

Test Results for Xbar Chart

TEST 1. One point more than 3,00 sigmas from center line.

Test Failed at points: 3 6 19

Xbar/S Chart for resist1-resist5



OTROS GRÁFICOS DE CONTROL DE VARIABLES

Diagramas de Control para Unidades Individuales

Se aplican en los casos en los que solamente se puede hacer una medición ($n=1$). En este procedimiento se emplea el recorrido o amplitud móvil de dos (o más) medidas sucesivas para estimar la variabilidad del proceso:

$$R_i = |x_i - x_{i-1}| \quad (R_i = R(x_i, \dots, x_{i-j}))$$

Los parámetros de los límites de control para las observaciones individuales serán:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \bar{x} + k \frac{\bar{R}}{d_2} & \left(\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \right) \\ \text{LC} &= \bar{x} \\ \text{LIC} &= \bar{x} - k \frac{\bar{R}}{d_2} \end{aligned}$$

tomando el valor de d_2 de la tabla la página 15 con n igual a la amplitud móvil.

Ejemplo:

| Viscosidad de un producto químico | | |
|-----------------------------------|-------------------|------------------|
| Número de lote | Viscosidad | Amplitud móvil |
| 1 | 33.75 | |
| 2 | 33.05 | 0.70 |
| 3 | 34.00 | 0.95 |
| 4 | 33.81 | 0.19 |
| 5 | 33.46 | 0.35 |
| 6 | 34.02 | 0.56 |
| 7 | 33.68 | 0.34 |
| 8 | 33.27 | 0.41 |
| 9 | 33.49 | 0.22 |
| 10 | 33.20 | 0.29 |
| 11 | 33.62 | 0.42 |
| 12 | 33.00 | 0.62 |
| 13 | 33.54 | 0.54 |
| 14 | 33.12 | 0.42 |
| 15 | <u>33.84</u> | <u>0.72</u> |
| | $\bar{x} = 33.52$ | $\bar{R} = 0.48$ |

Los parámetros serán:

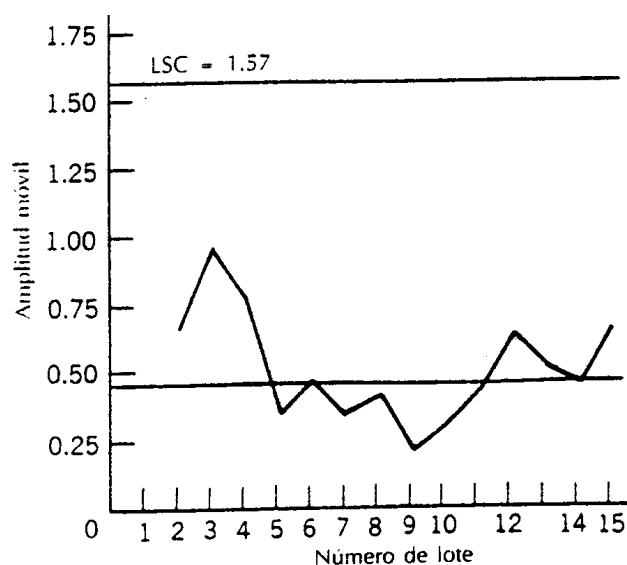
$$LSC = \bar{x} + 3\frac{\bar{R}}{d_2} = 33,52 + 3\frac{0,48}{1,128} = 34,80$$

$$\text{Línea Central} = \bar{x} = 33,52$$

$$LIC = \bar{x} - 3\frac{\bar{R}}{d_2} = 33,52 - 3\frac{0,48}{1,128} = 32,24$$

Y los gráficos serán:

Recorrido móvil



Observaciones individuales (Media móvil de 1 dato)

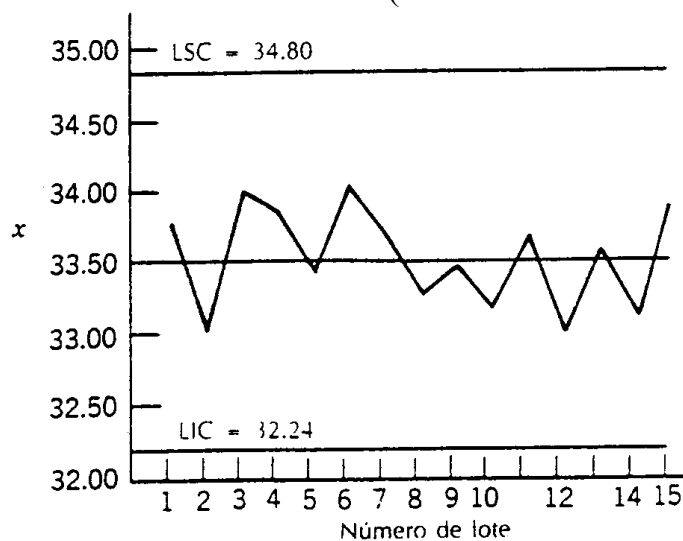


Diagrama de control de sumas acumulativas (CUSUM)

Principios básicos:

El inconveniente de los diagramas usados hasta ahora (Shewhart) es que se utiliza solamente la información respecto del proceso del último punto de la gráfica.

Por eso se propone el diagrama **cusum** (cumulative sum) como alternativa al diagrama de Shewhart, porque incorpora la información de todos los puntos llevados al gráfico.

Sea μ_0 la media del proceso (valor objetivo) y \bar{x}_i el promedio de la i -ésima muestra (x_i si $n=1$). Si llevamos a un gráfico la cantidad S_j , obtendremos el gráfico **cusum**:

$$S_j = \sum_{i=1}^j (\bar{x}_i - \mu_0) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

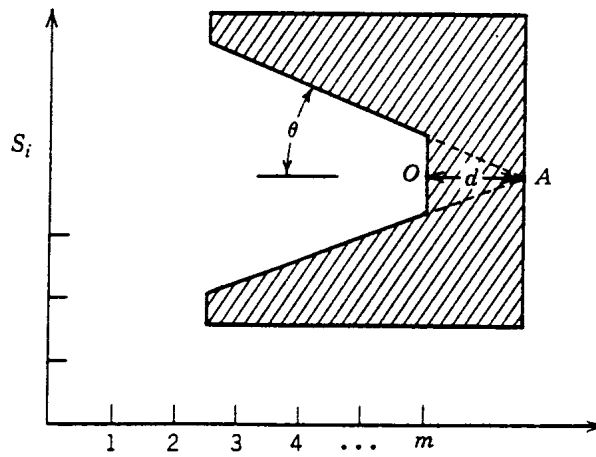
S_j recibe el nombre de suma acumulativa hasta la j -ésima muestra inclusive.

Si el proceso está bajo control, S_j tendrá que variar aleatoriamente alrededor de 0.

Si la media cambia hacia arriba $\mu_1 > \mu_0$, S_j se desplazará en esa dirección. Cuando la media baja, $\mu_1 < \mu_0$, S_j bajará.

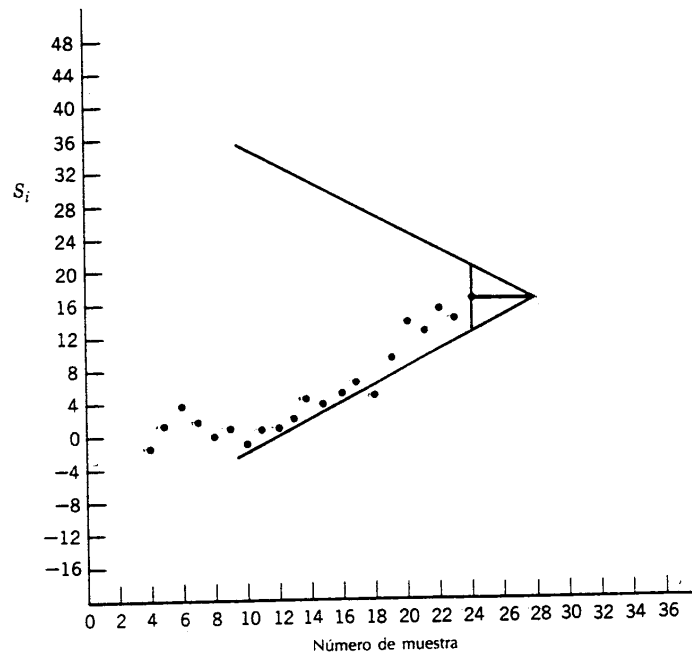
Para saber si el proceso está o no bajo control se utiliza la plantilla V, con el punto 0 en el último valor de S_m . Si todas las sumas acumulativas caen dentro de los brazos de la plantilla V el proceso está bajo control.

Plantilla V:



Forma típica de la plantilla

Ejemplo de utilización:



Los parámetros son d (distancia guía) y el ángulo θ . Los cuales toman los valores:

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\Delta}{2k} \right)$$

donde $\delta = \frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}$ es la magnitud que se quiere detectar (Incremento = $\Delta = \delta\sigma_{\bar{x}}$).

El factor de escala k relaciona las unidades de escala de los ejes de abscisa y ordenada. Se recomienda que k tome un valor preferentemente de $2\sigma_{\bar{x}}$ y en casos excepcionales de $\sigma_{\bar{x}}$.

Ventajas del uso del diagrama cusum:

- Más eficaz para detectar cambios relativamente pequeños
- A menudo se pueden detectar visualmente los cambios.
- Es relativamente fácil detectar el punto en el que ocurre el cambio.

Inconvenientes:

- Es más lento para detectar cambios grandes.
- No es bueno para poner un proceso bajo control.

Ejemplo:

Los gráficos CUSUM obtenidos con MINITAB para el ejemplo de la página 17, en el que se controla un proceso de fabricación de componentes para misiles, son:

Gráfico CUSUM bilateral (plantilla V)

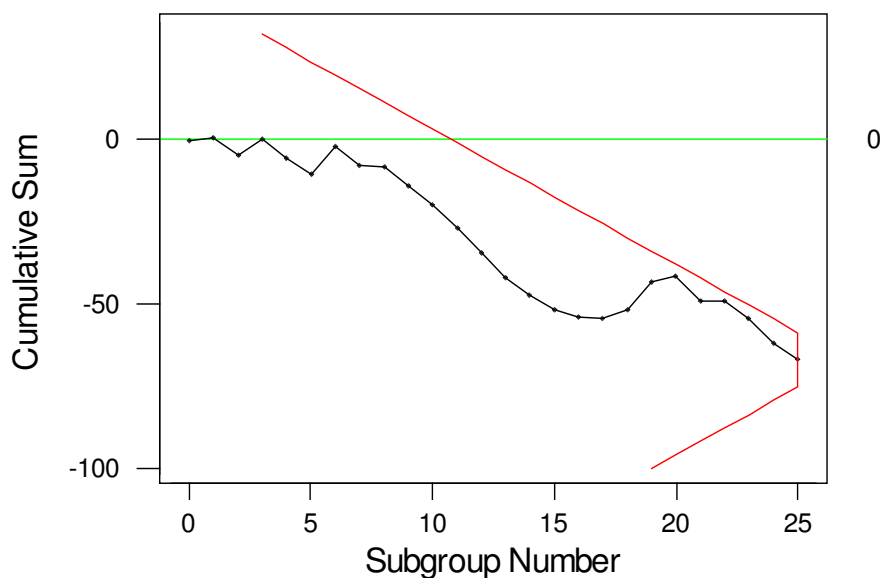
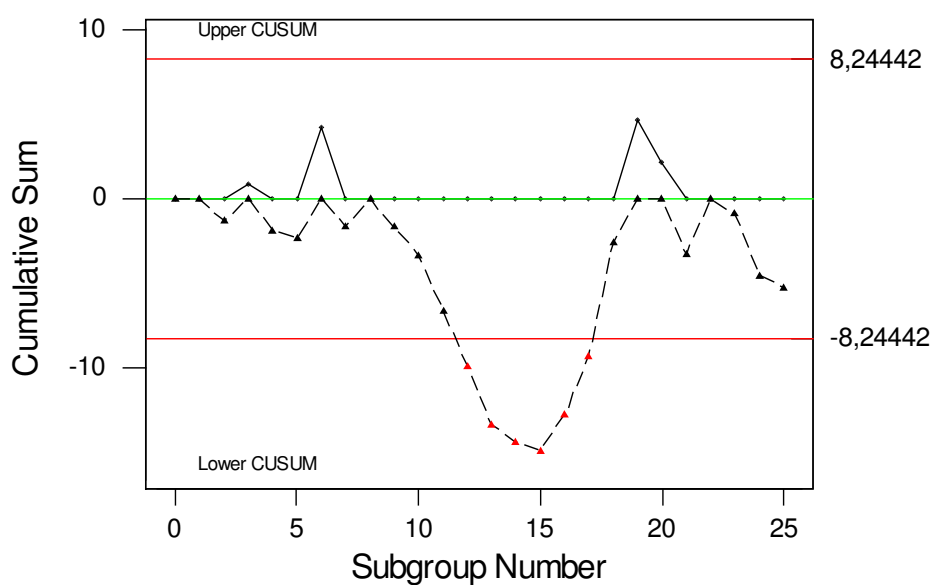


Gráfico CUSUM unilateral



Diseño de un diagrama de control CUSUM

Utilizaremos el valor de la longitud media de racha LMR para escoger d y θ .

$LMR(0)$ será la longitud media de racha cuando el proceso está bajo control.

$LMR(\delta)$ será la longitud media de racha cuando el proceso se ha desviado de la media (μ_0) una longitud $\delta\sigma_x$.

Tabla para la obtención de los parámetros de control en el diagrama de sumas acumulativas (CUSUM).

| | | $L(0) =$ Tamaño de corrida esperado cuando el proceso está bajo control | | | | | |
|------|--------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 50 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
| 0.25 | $(k/\sigma_x)\tan\theta$ | 0.125 | | | 0.195 | | 0.248 |
| | d | 47.6 | | | 46.2 | | 37.4 |
| | $L(0.25)$ | 28.3 | | | 74.0 | | 94.0 |
| 0.50 | $(k/\sigma_x)\tan\theta$ | 0.25 | 0.28 | 0.29 | 0.28 | 0.28 | 0.27 |
| | d | 17.5 | 18.2 | 21.4 | 24.7 | 27.3 | 29.6 |
| | $L(0.5)$ | 15.8 | 19.0 | 24.0 | 26.7 | 29.0 | 30.0 |
| 0.75 | $(k/\sigma_x)\tan\theta$ | 0.375 | 0.375 | 0.375 | 0.375 | 0.375 | 0.375 |
| | d | 9.2 | 11.3 | 13.8 | 15.0 | 16.2 | 16.8 |
| | $L(0.75)$ | 8.9 | 11.0 | 13.4 | 14.5 | 15.7 | 16.5 |
| 1.0 | $(k/\sigma_x)\tan\theta$ | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 |
| | d | 5.7 | 6.9 | 8.2 | 9.0 | 9.6 | 10.0 |
| | $L(1.0)$ | 6.1 | 7.4 | 8.7 | 9.4 | 10.0 | 10.5 |
| 1.5 | $(k/\sigma_x)\tan\theta$ | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| | d | 2.7 | 3.3 | 3.9 | 4.3 | 4.5 | 4.7 |
| | $L(1.5)$ | 3.4 | 4.0 | 4.6 | 5.0 | 5.2 | 5.4 |
| 2.0 | $(k/\sigma_x)\tan\theta$ | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| | d | 1.5 | 1.9 | 2.2 | 2.4 | 2.5 | 2.7 |
| | $L(2.0)$ | 2.26 | 2.63 | 2.96 | 3.15 | 3.3 | 3.4 |

Ejemplos: 1) Fijado $LMR(0)=400$ y $\delta=0,5$, escoger d y θ .

2) Fijado $\delta=1$ y tomando $LMR(\delta)<10$, escoger d y θ más convenientes.

Diagrama de control de media móvil

Aplicación: detectar con cierta rapidez pequeñas desviaciones de la media.

Tenemos m muestras de tamaño n sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ (x_1, x_2, \dots, x_m si $n=1$)

La media móvil de amplitud w en el momento t se define como:

$$M_t = \frac{\bar{x}_t + \bar{x}_{t-1} + \dots + \bar{x}_{t-w+1}}{w}$$

Su media es $\hat{\mu}(M_t) = \bar{\bar{x}}$

Su varianza será:
$$\sigma^2(M_t) = \frac{1}{w^2} \sum_{i=t-w+1}^t V(\bar{X}_i) = \frac{1}{w^2} \sum_{i=t-w+1}^t \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{nw}$$

Los límites de control a tres sigmas serán:

$$\text{LSC} = \bar{\bar{x}} + \frac{3\sigma}{\sqrt{nw}}$$

$$\text{Línea Central} = \bar{\bar{x}}$$

$$\text{LIC} = \bar{\bar{x}} - \frac{3\sigma}{\sqrt{nw}}$$

Estimando σ mediante $\frac{\bar{R}}{d_2}, \frac{\bar{S}}{c_2}$ ($n > 1$) o Rangos móviles ($n=1$)

Ejemplo (el mismo que en el gráfico de observaciones individuales):

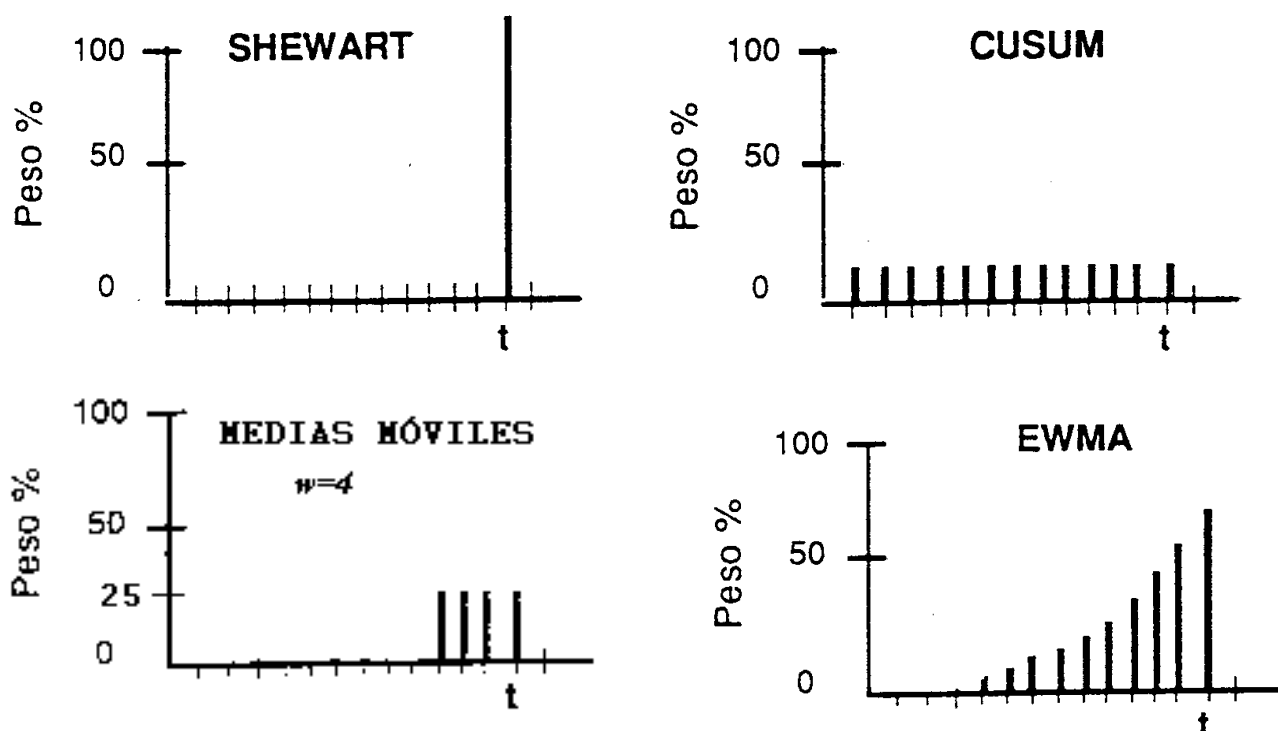
| Viscosidad de un producto químico | | |
|-----------------------------------|-------------------|------------------|
| Número de lote | Viscosidad | Amplitud móvil |
| 1 | 33.75 | |
| 2 | 33.05 | 0.70 |
| 3 | 34.00 | 0.95 |
| 4 | 33.81 | 0.19 |
| 5 | 33.46 | 0.35 |
| 6 | 34.02 | 0.56 |
| 7 | 33.68 | 0.34 |
| 8 | 33.27 | 0.41 |
| 9 | 33.49 | 0.22 |
| 10 | 33.20 | 0.29 |
| 11 | 33.62 | 0.42 |
| 12 | 33.00 | 0.62 |
| 13 | 33.54 | 0.54 |
| 14 | 33.12 | 0.42 |
| 15 | 33.84 | 0.72 |
| | $\bar{x} = 33.52$ | $\bar{R} = 0.48$ |

Cálculo de medias móviles de amplitud 2 y 3:

| Viscosidad | Medias Móviles de amplitud 2 | Medias Móviles de amplitud 3 |
|------------|------------------------------|------------------------------|
| 33,75 | | |
| 33,05 | | |
| 34,00 | | |
| 33,81 | | |
| 33,46 | | |
| 34,02 | | |
| 33,68 | | |
| etc. | | |

Gráficos EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

Diferencias entre los gráficos Shewart, CUSUM, Medias móviles y EWMA:



Se define el estadístico EWMA como $\hat{y}_t = \lambda y_t + (1 - \lambda)\hat{y}_{t-1}$ con $\hat{y}_0 = \bar{y}$
 $0 < \lambda < 1$

Desarrollando la expresión tenemos:

$$\begin{aligned} EWMA = \hat{y}_t &= \lambda y_t + (1 - \lambda)[\lambda y_{t-1} + (1 - \lambda)\hat{y}_{t-2}] = \lambda y_t + \lambda(1 - \lambda)y_{t-1} + (1 - \lambda)^2 \hat{y}_{t-2} = \\ &= \lambda y_t + \lambda(1 - \lambda)y_{t-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 y_{t-2} + \lambda(1 - \lambda)^3 y_{t-3} + \dots \end{aligned}$$

Ejemplos: $\lambda = 0,2 \quad \hat{y}_t = 0,2y_t + 0,16y_{t-1} + 0,128y_{t-2} + 0,1024y_{t-3} + \dots$
 $\lambda = 0,8 \quad \hat{y}_t = 0,8y_t + 0,16y_{t-1} + 0,032y_{t-2} + 0,0064y_{t-3} + \dots$

Si los valores de y (x_i, \bar{x}_i) siguen una $N(\mu(y), \sigma^2(y))$, la media y varianza del estadístico toman estas expresiones:

Media:

$$\begin{aligned}\bar{\hat{y}} &= E(\hat{y}_t) = \lambda E(y_t) + \lambda(1-\lambda)E(y_{t-1}) + \lambda(1-\lambda)^2 E(y_{t-2}) + \lambda(1-\lambda)^3 E(y_{t-3}) + \dots = \\ &= \mu(y) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(1-\lambda)^k = \mu(y)\end{aligned}$$

Varianza:

$$\begin{aligned}\sigma^2[\hat{y}_t] &= V[\hat{y}_t] = \lambda^2 V(y_t) + \lambda^2(1-\lambda)^2 V(y_{t-1}) + \lambda^2(1-\lambda)^4 V(y_{t-2}) + \lambda^2(1-\lambda)^6 V(y_{t-3}) + \dots \\ &= \sigma^2(y) \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-\lambda)^{2k} = \sigma^2(y) \frac{\lambda}{2-\lambda}\end{aligned}$$

Desviación típica: $\sigma_{\hat{y}} = \sigma(y) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$

Por lo que los límites de control son:

$$\text{LSC} = \mu(y) + 3\sigma(y) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$\text{Línea Central} = \mu(y)$$

$$\text{LIC} = \mu(y) - 3\sigma(y) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

Notas: Los y_i pueden ser \bar{x}_i (si $n > 1$) o bien x_i (si $n = 1$).

Estimar $\mu(y)$ mediante $\bar{\bar{x}}$ (si $n > 1$) o \bar{x} (si $n = 1$).

Estimar $\sigma(y)$ mediante $\frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}, \frac{\bar{S}}{c_2 \sqrt{n}}$ (si $n > 1$) o Rangos móviles (si $n = 1$).

Ejemplo (el mismo que en el gráfico de observaciones individuales):

| Viscosidad de un producto químico | | |
|-----------------------------------|-------------------|------------------|
| Número de lote | Viscosidad | Amplitud móvil |
| 1 | 33.75 | |
| 2 | 33.05 | 0.70 |
| 3 | 34.00 | 0.95 |
| 4 | 33.81 | 0.19 |
| 5 | 33.46 | 0.35 |
| 6 | 34.02 | 0.56 |
| 7 | 33.68 | 0.34 |
| 8 | 33.27 | 0.41 |
| 9 | 33.49 | 0.22 |
| 10 | 33.20 | 0.29 |
| 11 | 33.62 | 0.42 |
| 12 | 33.00 | 0.62 |
| 13 | 33.54 | 0.54 |
| 14 | 33.12 | 0.42 |
| 15 | 33.84 | 0.72 |
| | $\bar{x} = 33.52$ | $\bar{R} = 0.48$ |

Cálculo del estadístico EWMA para $\lambda=0,3$:

| Viscosidad | EWMA |
|------------|------|
| 33,75 | |
| 33,05 | |
| 34,00 | |
| 33,81 | |
| 33,46 | |
| 34,02 | |
| 33,68 | |
| etc. | |

Ejemplo:

En el proceso de fabricación de partes componentes para misiles (ver página 17), se controlaba la resistencia a la tensión, en libras por pulgada cuadrada, con 25 muestras de tamaño 5 cada hora.

Los resultados obtenidos de **medias móviles** de amplitud 3 y estadístico **Ewma** con $\lambda=0,2$ para la característica media muestral son:

| Muestra | Media muestral | Media Móvil | EWMA |
|---------|----------------|-------------|----------|
| 1 | 1510,8 | 1510,80 | 1508,022 |
| 2 | 1504,6 | 1507,70 | 1507,338 |
| 3 | 1515,0 | 1510,13 | 1508,870 |
| 4 | 1504,0 | 1507,87 | 1507,896 |
| 5 | 1505,4 | 1508,13 | 1507,397 |
| 6 | 1518,4 | 1509,27 | 1509,598 |
| 7 | 1504,2 | 1509,33 | 1508,518 |
| 8 | 1509,6 | 1510,73 | 1508,734 |
| 9 | 1504,2 | 1506,00 | 1507,828 |
| 10 | 1504,2 | 1506,00 | 1507,102 |
| 11 | 1502,6 | 1503,67 | 1506,202 |
| 12 | 1502,6 | 1503,13 | 1505,481 |
| 13 | 1502,4 | 1502,53 | 1504,865 |
| 14 | 1504,8 | 1503,27 | 1504,852 |
| 15 | 1505,4 | 1504,20 | 1504,962 |
| 16 | 1508,0 | 1506,07 | 1505,569 |
| 17 | 1509,4 | 1507,60 | 1506,335 |
| 18 | 1512,6 | 1510,00 | 1507,588 |
| 19 | 1518,8 | 1513,60 | 1509,831 |
| 20 | 1511,6 | 1514,33 | 1510,185 |
| 21 | 1502,6 | 1511,00 | 1508,668 |
| 22 | 1509,6 | 1507,93 | 1508,854 |
| 23 | 1505,0 | 1505,73 | 1508,083 |
| 24 | 1502,2 | 1505,60 | 1506,907 |
| 25 | 1505,2 | 1504,13 | 1506,565 |

Y los correspondientes gráficos de control son los siguientes:

Gráfico de Medias Móviles (amplitud= $w=3$ y $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$)

Moving Average Chart for resist1 - resist5

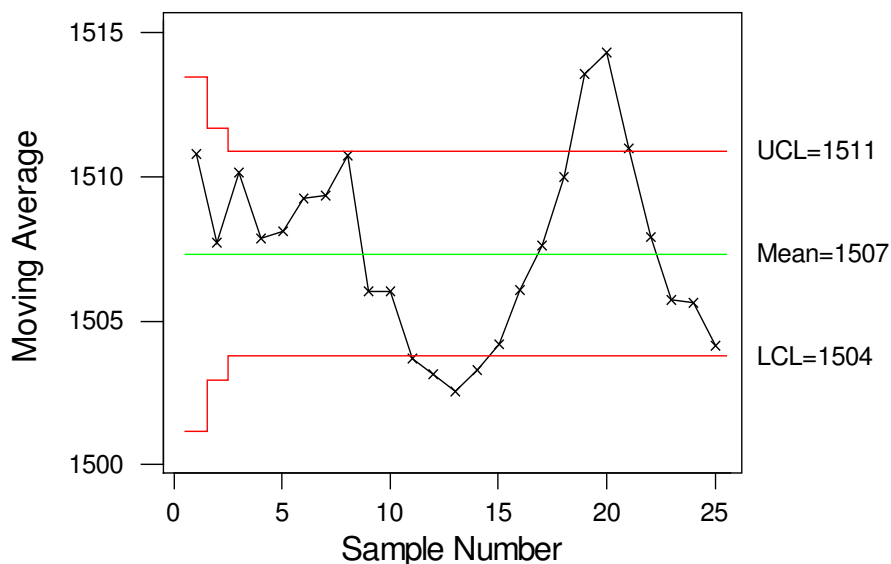
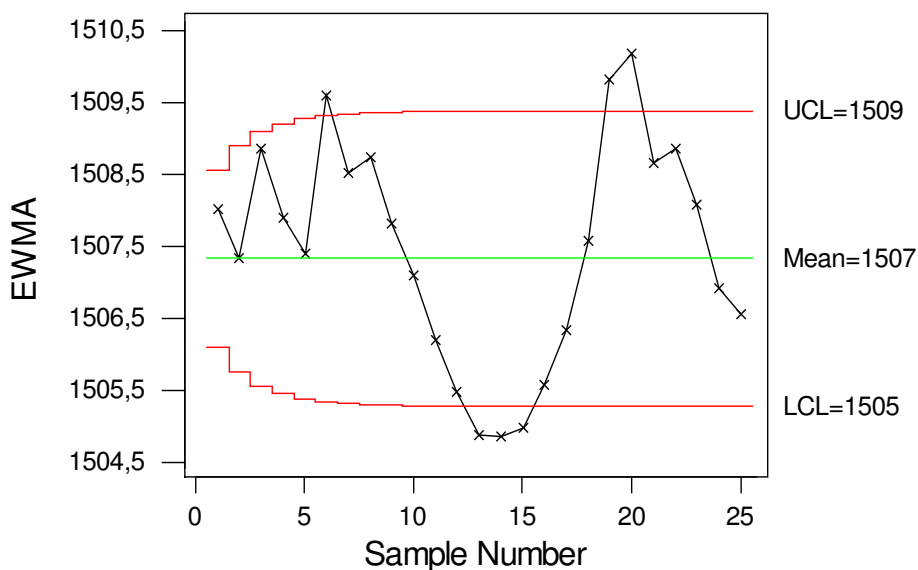


Gráfico EWMA (peso= $\lambda=0,2$ y $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$)

EWMA Chart for resist1 - resist5



PROBLEMAS de Diagramas de variables

1.- Un fabricante de chocolate produce pastillas envueltas individualmente. Cada tableta tiene un peso nominal de 30 g que aparece impreso en la envoltura. Para el control de calidad se inspecciona una muestra de tres tabletas cada diez minutos de fabricación. Se considera que el proceso está fuera de control (por ejemplo: se rechaza H_0) siempre que el promedio \bar{X} de la muestra caiga fuera de los límites $2,5\sigma_{\bar{x}}$ a ambos lados de la media deseada, $\mu = 30$ g. Se asume que la desviación estándar σ es 0,25 g y que el promedio \bar{X} de la muestra esta normalmente distribuido cuando el proceso está bajo control. En la muestra observada a las nueve y diez de la mañana el peso medio \bar{X} es de 30,39 g.

a) ¿Se rechaza la hipótesis nula H_0 ?

b) ¿Cuál es la probabilidad, α , de que se rechace H_0 cuando es cierta?

2.- Hay que crear los gráficos de control \bar{X} y R para la anchura de un repuesto de automóvil. El tamaño de la muestra es 5. Se calculan \bar{X} y R para cada muestra después de 20 muestras, $\sum \bar{X}_i = 309,5$ y $\sum R_i = 22,38$.

a) Determinar los límites de control para los gráficos \bar{X} y R asumiendo que $k = 3$.

b) Calcular la desviación estándar.

3.- Un repuesto de automóvil debe cumplir con las especificaciones $5,0 \pm 0,15$. En caso contrario será desechado. Los datos reunidos por el departamento de control de calidad son los siguientes:

$$n = 5 \qquad \text{número de muestreos} = 20 \qquad \sum \bar{X}_i = 100,2 \qquad \sum R_i = 4,8$$

Asumiendo que el proceso está bajo control, ¿qué porcentaje del total de repuestos fabricados cae fuera de los límites de especificación?

4.- Se toman muestras de $n = 8$ de un proceso de manufactura a intervalos regulares. Se mide cierta característica de calidad, y se calculan los valores de \bar{X} y R para cada muestra. Después de 50 muestras, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{50} \bar{x}_i = 2.000 \qquad \sum_{i=1}^{50} R_i = 250$$

Suponga que la característica de calidad está distribuida normalmente.

- Calcule los límites de control para los diagramas de control de \bar{X} y R.
- Si los límites de especificación son $41 \pm 5,0$ y todos los puntos de ambos diagramas caen entre los límites de control calculados en el inciso (a), ¿cuál es su conclusión acerca de la capacidad del proceso de producir artículos que satisfagan estas especificaciones?
- Suponiendo que se puede retrabajar un artículo que excede el límite superior de especificación, y que se debe rechazar tal artículo si está por debajo del límite inferior de especificación, ¿qué porcentaje de artículos para retrabajo y rechazo origina el proceso ahora?
- Formule algunas sugerencias para mejorar el rendimiento del proceso.

5.- Se toman muestras de $n = 6$ artículos de un proceso de manufactura, a intervalos regulares. Se mide una característica de calidad, distribuida normalmente, y se calculan los valores de \bar{X} y S para cada muestra. Después del análisis de 50 subgrupos, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{50} \bar{x}_i = 1.000 \qquad \sum_{i=1}^{50} S_i = 75$$

Suponga que todos los puntos de ambas gráficas caen entre los límites de control.

- Calcule los límites de control para los diagramas de control de \bar{X} y S.
- Si los límites de especificación son $19 \pm 4,0$, ¿cuál es su conclusión acerca de la capacidad del proceso de producir artículos conformes con las especificaciones?
- Suponiendo que se puede retrabajar un artículo que excede el límite superior de especificación, mientras que si se encuentra por debajo del límite inferior hay que rechazarlo, ¿qué porcentaje de artículos de recuperación y rechazo produce ahora el proceso?
- Si el proceso se centrara en $\mu = 19,0$, ¿cuál sería el efecto en el porcentaje de artículos para rechazo y retrabajo?

6.- Se utiliza un diagrama de \bar{X} para controlar la media de una característica de calidad. Se sabe que $\sigma = 6.0$ y $n = 4$, la línea central corresponde a 200, y LSC = 209, LIC = 191. Si la media del proceso cambia a 188, determinar la probabilidad de que se detecte este cambio en la primera muestra subsecuente y, a partir de ella calcular:

- La probabilidad de detectar el cambio en la tercera muestra después del cambio.
- La probabilidad de detectar el cambio en la tercera muestra o antes.
- El número de muestras necesarias para detectar el cambio en la media.

7.-Cada hora se obtienen muestras de tamaño $n = 5$ de un proceso de fabricación. Se mide una característica de calidad, y se calculan los valores de \bar{X} y R para cada muestra. Después del análisis de 25 muestras, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i = 622,5 \qquad \sum_{i=1}^{25} R_i = 9,00$$

- Halle los límites de control para los diagramas de \bar{X} y R.
- Suponga que ambos indican control. Si las especificaciones son $26,40 \pm 0,50$, estime la fracción disconforme.
- Si la media del proceso fuera 26,40, ¿cuál sería tal fracción disconforme?

8.-Se obtienen muestras de tamaño $n = 6$ de un proceso cada media hora. Después de 50 muestras, se calculan $\bar{\bar{x}} = 20,0$ y $\bar{R} = 1,5$. Suponga que ambos diagramas indican control, y que la característica de calidad se distribuye normalmente.

- Estime la desviación estándar proceso.
- Halle los límites de control para los diagramas de \bar{X} y R.
- Si la media proceso cambia a 22, ¿cuál será la probabilidad de concluir que el proceso todavía está bajo control?
- Halle los límites de control para los diagramas de \bar{X} y S.

9.-Se obtuvieron los datos siguientes, con muestras de tamaño 5, para el voltaje de salida en un proceso de fabricación de fuentes de energía eléctrica:

| Número de muestra | \bar{x} | R | Número de muestra | \bar{x} | R |
|-------------------|-----------|----|-------------------|-----------|---|
| 1 | 103 | 4 | 6 | 106 | 3 |
| 2 | 102 | 5 | 7 | 102 | 7 |
| 3 | 104 | 2 | 8 | 105 | 2 |
| 4 | 105 | 11 | 9 | 106 | 4 |
| 5 | 104 | 4 | 10 | 104 | 3 |

- Determine las líneas centrales y los límites de control adecuados para controlar la producción.
- Suponga que la característica de calidad tiene distribución normal. Estime la desviación estándar del proceso.
- ¿Cuál sería la estimación de la fracción disconforme del proceso si las especificaciones para la característica son 103 ± 4 ?
- ¿Cuáles serían sus sugerencias para reducir la fracción disconforme?

10.- Se mantienen gráficos de control sobre el peso de un elemento. Después de un período base de 30 muestreos de tamaño 3, $\sum \bar{X}_i = 12930$ g y $\sum R_i = 123$ g.

- Calcular los límites de control y estimar la desviación estándar de los pesos del artículo. Supóngase que las observaciones del período base indican que el proceso está bajo control.
- Calcular los límites para un gráfico de control EWMA con $\lambda=0,4$.
- Si la media del proceso en cuanto a pesos cambia a 433 g, ¿Cuánto tiempo se necesitará para detectar el cambio usando los límites de control de la parte (a)?

11.- Una característica de calidad, distribuida normalmente, se controla por medio de un diagrama de \bar{X} y otro de R. Los diagramas tienen los siguientes parámetros (n = 4):

| Diagrama de \bar{x} | Diagrama de R |
|-----------------------|-----------------------|
| LSC = 626,0 | LSC = 18,75 |
| Línea central = 620,0 | Línea central = 8,236 |
| LIC = 614,0 | LIC = 0 |

Ambos diagramas indican control.

- (a) ¿Cuál es la desviación estándar estimada del proceso?
- (b) Suponga que se cambiara el diagrama de R por otro de S. ¿Cuáles serían los parámetros apropiados para el diagrama de S?
- (c) Si las especificaciones para el producto son 610 ± 15 , ¿cuál será la estimación para la fracción disconforme del proceso?
- (d) ¿Qué se podría hacer para reducir esta fracción no conforme?
- (e) ¿Cuál es la probabilidad de detectar un cambio a 610 en la media del proceso, en la primera muestra después del cambio (σ permanece constante)?
- (f) ¿Cuál es la probabilidad de descubrir el cambio del inciso (e), por lo menos para la tercera muestra después del cambio?

12.- Se inicia la producción de un componente recientemente proyectado. Para vigilar su longitud se preparan gráficos \bar{X} y R basados en 25 muestras de cuatro elementos cada uno. Para estas 25 muestras $\sum \bar{X}_i = 500$ cm y $\sum R_i = 153,2$ cm. Determinar los límites de control $3\sigma_{\bar{x}}$ ¿Cuál es la probabilidad de que un cambio de 2 cm en la media del proceso sea detectado en la primera muestra observado después del cambio?

13.- La especificación para el peso de un elemento es 1.380 ± 25 g. El análisis del período base, basado en 30 muestreos de cinco elementos cada uno, indica que la media del proceso es 1.400 g, con una desviación estándar de 8 g.

- (a) ¿Qué porcentaje del producto es defectuoso?
- (b) ¿A qué nivel de la media del proceso se minimizará la fabricación de artículos defectuosos?
- (c) Supóngase que se producen 300 unidades durante cada período de muestreo; ¿cuántos elementos defectuosos cabría esperar que se produjeran durante el período base?
- (d) Si la media del proceso se coloca en el nivel óptimo establecido en la parte b) y vuelve a cambiar al nivel de 1.400 g, como promedio, ¿cuántos elementos defectuosos debería producirse antes de que se detectara el cambio?
- (e) ¿Cuál sería la respuesta a la parte d) si el cambio fuera a 1.384 g en lugar de 1.400 g?

14.- Los datos del período base indican que: se realizaron 20 muestreos de tamaño 6, $\bar{\bar{x}} = 153,3$; $\bar{R} = 12,65$; el proceso está bajo control. En esta situación, se pide:

- a) Calcular los límites de control en $\mu \pm 3\sigma_{\bar{x}}$.
- b) Calcular la longitud media de racha: 1) cuando el proceso está bajo control; y
2) si la media del proceso cambia a 158,5.
- c) Calcular los límites para un gráfico de control de medias móviles de amplitud 4.
- d) Calcular los límites para un gráfico de control EWMA con $\lambda = 0,5$.

SOLUCIONES de los problemas y ejercicios

- 1.- a) Sí se rechaza la hipótesis, ya que los límites son LSC=30,36075 y LIC=29,63925.
b) $\alpha=0,0124$
- 2.- a) Gráfico de medias: LSC=16,121 y LIC=14,829 Rangos: LSC=2,367 y LIC=0
b) $\sigma=0,4811$
- 3.- 14,75% fuera de los límites especificados.
- 4.- a) Gráfico de medias: LSC=41,865 y LIC=38,135 Rangos: LSC=9,32 y LIC=0,68
b) Artículos conformes: 98,8326%
c) Se retrabaja un 0,03% y se rechaza un 1,1374%
d) Si la media cambia a 41, resultarán un 99,56% de artículos conformes.
- 5.- a) Gráfico de medias: LSC=22,115 y LIC=17,885 Desviaciones: LSC=2,955 y LIC=0,045
b) Artículos conformes: 95,72%
c) Se retrabaja un 4,09% y se rechaza un 0,187%
d) Si la media cambia a 19, resultarán un 97,96% de artículos conformes (1,02% de rechazados y un 1,02% de retrabajados)
- 6.- Probabilidad de detectar el cambio 0,8413. a) 0,0212 b)0,996 c)LMR=1,1886
- 7.- a) Gráfico de medias: LSC=25,1077 y LIC=24,6923 Rangos: LSC=0,7614 y LIC=0
b) Artículos disconformes: 100%
c) Si la media fuera 26,40, resultarán un 0,12% de artículos disconformes.
- 8.- a) $\sigma=0,5919$
b) Gráfico de medias: LSC=20,7245 y LIC=19,2755 Rangos: LSC=3,006 y LIC=0
c) Si la media cambia a 22, se concluye que está bajo control con probabilidad 0 (β).
d) Gráfico de medias (como en apartado b) Desviaciones: LSC=1,0126 y LIC=0,0154

- 9.- a) Gráfico de medias: LSC=106,70 y LIC=101,5035 Rangos: LSC=9,5175 y LIC=0
 b) $\sigma=1,9346518$
 c) Artículos disconformes: 7,09%
 d) Si la media fuera 103, resultarán un 3,84% de artículos disconformes.
- 10.- a) Gráfico de medias: LSC=435,194 y LIC=426,806
 Gráfico de Rangos: LSC=10,5575 y LIC=0 $\sigma=2,42174$
 b) Gráfico EWMA: LSC=433,0973 y LIC=428,9027
 c) LMR=1/1- β =1/0,0582=17,182
- 11.- a) $\sigma=4$ b) $\bar{S}=3,1916$
 c) Artículos disconformes: 10,56%
 d) Si la media fuera 610, resultarán un 0,02% de artículos disconformes.
 e) 1- β =0,9772 f) P(L \leq 3)=0,999988
- 12.- Gráfico de medias: LSC=24,4673 y LIC=15,5327 Rangos: LSC=13,984 y LIC=0
 Si la media cambia 2 cm (es lo mismo 18 o 22) tendremos 1- β =0,0485
- 13.- a) Artículos disconformes: 26,6%
 b) Si la media fuera 1380, resultarán un 0,19% de artículos disconformes.
 c) Defectuosos en periodo base = 30 muestras * 300 por muestra * 0,266 = 2.394 unidades
 d) Para calcular $\beta=0,0048$, se utiliza k=3, n=5 y h=2,5 o bien se calcula el gráfico de medias:
 LSC=1390,733 y LIC=1369,267. De ahí son LMR=1,0048 muestras de 300 elementos, luego defectuosos: 1,0048*300*0,266=80,183 defectuosos en media antes de detectar el cambio.
 e) Análogo al apartado anterior: LMR(h=0,5) * 300 * P(defectuoso con media 1384) = 33,223*300*0,0045=44,79 defectuosos en media antes de detectar el cambio.
- 14.- a) Gráfico de medias: LSC=159,41 y LIC=147,19
 b) 1) LMR(h=0)=1 / 0,0027=370,37 2) LMR(h=1,0416)=1 / 0,32766 = 3,0525
 c) Gráfico de medias móviles: LSC=156,357 y LIC=150,243
 d) Gráfico EWMA: LSC=157,543 y LIC=149,057