

Tema 5: Aplicaciones de la integral

Hasta ahora “únicamente” hemos aprendido a calcular integrales, sin plantearnos la utilidad que éstas pueden tener. Sin embargo, la integral definida es un método rápido para calcular áreas, volúmenes, longitudes, etc., lejos de los procesos lentos y laboriosos que empleaban los griegos. En física, su empleo es constante, al estudiar el movimiento, el trabajo, la electricidad.

Ahora vamos a ilustrar las distintas aplicaciones que tiene el cálculo integral

1. Cálculo de áreas planas

Tal cómo hemos visto antes, la integral definida es una generalización del proceso del cálculo de áreas. Ahora bien, el área de un recinto es siempre positiva, mientras que la integral puede ser positiva, negativa o nula. Por tanto, en la aplicación de la integral al cálculo de áreas, debe tenerse en cuenta el signo de cada uno de los recintos limitados por el eje OX , y tomar el valor absoluto de los mismos. Su suma es el área.

Ejemplo 1 :

- Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.
- Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ y el eje OX en el intervalo $[1,3]$.
- Hallar el área delimitada por la gráfica de $y = \cos x$ y el eje OX , en el intervalo $[0,2\pi]$.

Con escasas modificaciones podemos extender la aplicación de la integral definida para cubrir no sólo el área de la región bajo una curva, sino el de una región comprendida entre dos curvas. Por tanto, obtenemos el siguiente resultado :

Teorema (Área de una región entre dos curvas): Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y se verifica que $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g , y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, es :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad \blacksquare$$

Observaciones:

- Es importante darse cuenta de que la validez de la fórmula del área depende sólo de que f y g sean continuas y de que $g(x) \leq f(x)$.
- Las gráficas de f y g pueden estar situadas de cualquier manera respecto del eje OX .
- Si, cómo suele ocurrir, unas veces se cumple que $g(x) \leq f(x)$ y otras veces que $f(x) \leq g(x)$, entonces el área de la región comprendida entre f y g sobre el intervalo $[a, b]$, viene dado por la fórmula:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad \updownarrow$$

En la práctica, no se suele trabajar con el valor absoluto, puesto es más fácil dibujar las gráficas de f y g , calculando los puntos de intersección de ambas, y sumar una o más integrales para obtener el área deseada.

Ejemplo 2:

- Hallar el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.
- Hallar el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.
- Hallar el área de la región limitada por $f(x) = x^2$, $g(x) = -x + 2$, y el eje OX .
- Hallar el área de la región limitada por $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = -x$ en $[0,1]$.
- Hallar el área de la región limitada por $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = 2x - x^2$

Observación: Algunas veces es más conveniente calcular el área integrando respecto a la variable y en vez de la variable x .

Ejemplo 3: Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $y^2 = 3 - x$ e $y = x - 1$.

2. Cálculo de volúmenes

Al introducir la integración, vimos que el área es solamente una de las muchas aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante la tenemos en su uso para calcular el volumen de un sólido tridimensional.

Si una región de un plano se gira alrededor de un eje E de ese mismo plano, se obtiene una región tridimensional llamada **sólido de revolución** generado por la región plana alrededor de lo que se conoce como **eje de revolución**. Este tipo de sólidos suele aparecer frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción. Son ejemplos de sólidos de revolución: ejes, embudos, pilares, botellas y émbolos.

Existen distintas fórmulas para el volumen de revolución, según se tome un eje de giro paralelo al eje OX o al eje OY . Incluso a veces, es posible hallar el volumen de cuerpos que no son de revolución.

2.1. Volúmenes de revolución: El Método de los discos

Si giramos una región del plano alrededor de un eje obtenemos un sólido de revolución. El más simple de ellos es el cilindro circular recto o **disco**, que se forma al girar un rectángulo alrededor de un eje adyacente a uno de los lados del rectángulo. El volumen de este disco de radio R y de anchura ω es:

$$\text{Volumen del disco} = \pi R^2 \omega$$

Para ver cómo usar el volumen del disco para calcular el volumen de un sólido de revolución general, consideremos una función continua $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$, cuya gráfica determina con las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, el recinto R . Si giramos este recinto alrededor del eje OX , obtenemos un sólido de revolución.

Se trata de hallar el volumen de este cuerpo engendrado por R . Para ello hay que seguir un proceso similar al realizado en la definición de integral definida.

Elegimos una partición regular de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Estas divisiones determinan en el sólido n discos cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un disco es $\pi R^2 \omega$, la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:

$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i) (x_i - x_{i-1})$$

siendo:

- ◆ $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$
- ◆ $\omega = x_i - x_{i-1}$, la altura (anchura) de los cilindros parciales
- ◆ $R = f(c_i)$ el radio de los cilindros parciales

Si el número de cilindros parciales aumenta, su suma se aproxima cada vez más al volumen del sólido; es decir:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i) (x_i - x_{i-1})$$

Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Además, si se toma el eje de revolución verticalmente, se obtiene una fórmula similar :

$$V = \int_c^d \pi f^2(y) dy$$

Ejemplo 4:

- a) Hallar el volumen de la esfera de radio r .
- b) Hallar el volumen del elipsoide de revolución engendrado por una elipse al girar alrededor del eje OX .
- c) Hallar el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h .
- d) Hallar el volumen engendrado por la revolución entorno al eje OX del recinto limitado por la curva $y = \sin x$, entre 0 y π .
- e) Hallar el volumen del sólido generado al hacer girar la región limitada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ y el eje x ($0 \leq x \leq 3$), entorno del eje x .
- f) Hallar el volumen del sólido generado al hacer girar la región limitada por la gráfica de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$, en torno a la recta $y = 1$.

2.2. Volúmenes de revolución: El Método de las arandelas

El método de los discos puede extenderse fácilmente para incluir sólidos de revolución con un agujero, reemplazando el disco representativo por una **arandela** representativa. La arandela se obtiene girando un

rectángulo alrededor de un eje. Si R y r son los radios externos e internos de la arandela, y ω es la anchura de la arandela, entonces el volumen viene dado por:

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)\omega$$

Entonces, generalizando de forma análoga a como se hizo en el método de los discos, si tenemos dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$, con $0 \leq g(x) \leq f(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, el volumen engendrado se calcula restando los sólidos de revolución engendrados por los recintos de ambas funciones, es decir:

$$V = \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Si las funciones se cortan, habrá que calcular los volúmenes de los sólidos engendrados en cada uno de los subintervalos donde se puede aplicar el método anterior.

Ejemplo 5:

- Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, alrededor del eje OX .
- Hallar el volumen de la figura engendada al girar la superficie comprendida entre la parábola $y^2 = x$, y la circunferencia $y^2 = 2x - x^2$.
- Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OY .
- Un mecánico perfora un agujero a través del centro de una esfera de metal de 5 cm de radio, teniendo el agujero un radio de 3 cm. ¿Cuál es el volumen del anillo resultante ?

2.3. Método de secciones conocidas

En este apartado veremos cómo se calcula el volumen de algunos cuerpos geométricos cuando conocemos el área de las bases de los cilindros parciales en que hemos dividido el sólido. Con el método de discos, podemos hallar el volumen de un sólido que tenga una sección circular cuya área sea $\Delta A = \pi R^2$. Podemos generalizar este método a sólidos de cualquier forma siempre y cuando sepamos la fórmula del área de una sección arbitraria, como cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

Consideremos un sólido que tiene la propiedad de que la sección transversal a una recta dada tiene área conocida. Esto equivale a decir intuitivamente que en cada corte que hacemos, conocemos el área de la sección correspondiente.

En particular, supongamos que la recta es el eje OX y que el área de la sección transversal está dada por la función $A(x)$, definida y continua en $[a, b]$. La sección $A(x)$ está producida por el plano α perpendicular a OX .

Siguiendo un proceso similar al realizado en la definición de la integral de Riemann:

Elegimos una partición regular de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Estas divisiones determinan en el sólido n secciones o rodajas cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro es $\pi R^2 \omega$, la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:

$$\sum_{i=1}^n A(c_i) (x_i - x_{i-1})$$

siendo:

- ◆ Siendo c_i un punto intermedio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$
- ◆ $\omega = x_i - x_{i-1}$, la altura de los cilindros parciales
- ◆ $\pi R^2 = A(c_i)$ el área de la base de los cilindros parciales

Si el número de cilindros parciales aumenta, su suma se aproxima cada vez más al volumen del sólido; es decir:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(c_i) (x_i - x_{i-1})$$

Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Para hallar el volumen de un sólido por el método de las secciones, se procede como se indica a continuación :

1. Esbozar la figura, incluyendo un eje perpendicular a las secciones de área conocida (es decir, un eje OX).
2. Escoger una sección perpendicular al eje OX .
3. Expresar el área $A(x)$ de la base de la sección en términos de su posición x sobre el eje OX .
4. Integrar entre los límites apropiados.

Ejemplo 6:

- a) Calcular el volumen de un sólido cuya base es el área limitada por las rectas $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $g(x) = -1 + \frac{x}{2}$, $x = 0$, y cuya sección perpendicular al eje X es un triángulo equilátero.
- b) Hallar la fórmula del volumen de una pirámide de base cuadrada, donde h es la altura de la pirámide, y B es el área de la base.
- c) Hallar la fórmula del volumen de un cono de base B , y altura h .

2.4. Volúmenes de revolución: Método de capas

En esta sección estudiamos un método alternativo para el cálculo de un volumen de un sólido de revolución, un método que emplea capas cilíndricas.

Para introducir el **método de capas**, consideramos un rectángulo representativo, donde:

- ω = anchura del rectángulo (espesor).
- h = altura del rectángulo.
- p = distancia del centro del rectángulo al eje del giro (radio medio).

Cuando este rectángulo gira en torno al eje de revolución, engendra una capa cilíndrica (o tubo) de anchura ω . Para calcular el volumen de esta capa consideramos dos cilindros. El radio del mayor corresponde al radio externo de la capa, y el radio del menor al radio interno de la capa. Puesto que p es el radio medio de la capa, sabemos que el radio externo es $p + (\omega/2)$, y el radio interno es $p - (\omega/2)$. Por tanto, el volumen de la capa, viene dado por la diferencia:

$$\begin{aligned} \text{Volumen de la capa} &= \text{volumen del cilindro} - \text{volumen del agujero} = \\ &= \pi \left(p + \frac{\omega}{2} \right)^2 h - \pi \left(p - \frac{\omega}{2} \right)^2 h = \\ &= 2\pi p h \omega = 2\pi \cdot (\text{radio medio}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{espesor}) \end{aligned}$$

Usamos esta fórmula para calcular el volumen de un sólido de revolución como sigue. Suponemos que la región plana gira sobre una recta y engendra así dicho sólido. Si colocamos un rectángulo de anchura Δy paralelamente al eje de revolución, entonces al hacer girar la región plana en torno al eje de revolución, el rectángulo genera una capa de volumen:

$$\Delta V = 2\pi [p(y)h(y)] \Delta y$$

Si aproximamos el volumen del sólido por n de tales capas de anchura Δy , altura $h(y_i)$, y radio medio $p(y_i)$, tenemos:

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^n 2\pi [p(y_i)h(y_i)] \Delta y = 2\pi \sum_{i=1}^n [p(y_i)h(y_i)] \Delta y$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que:

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n [p(y_i)h(y_i)] \Delta y = 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)] dy$$

Por tanto, podemos enunciar el método de capas de la siguiente forma:

Para calcular el volumen de un sólido de revolución con el método de capas, se usa una de las dos siguientes opciones:

$$\text{Eje horizontal de revolución: } V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y) dy$$

$$\text{Eje vertical de revolución: } V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x) dx$$

Para hallar el volumen de un sólido por el método de capas, se procede como se indica a continuación :

1. Esbozar la región plana que va a ser girada, hallando los puntos de intersección de las curvas que la limitan.
2. Sobre el dibujo hallar un rectángulo paralelo al eje de revolución.

3. Teniendo como base el boceto, escribir el volumen de la capa.
4. Integrar entre los límites apropiados.

Ejemplo 7:

- a) Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = x - x^3$ y el eje x ($0 \leq x \leq 1$), alrededor del eje y .
- b) Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ y el eje x ($0 \leq x \leq 1$), alrededor del eje y .
- c) Calcular el volumen del sólido generado al girar, en torno a la recta $x = 2$, la región limitada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$.

Observación: Los métodos de discos y de capas se distinguen porque en el de discos el rectángulo representativo es siempre perpendicular al eje de giro, mientras que en el de capas es paralelo. 

Con frecuencia uno de los dos métodos es preferible al otro. Los próximos ejemplos ilustran cuando uno es preferible al otro.

Ejemplo 8:

- a) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ entorno al eje y .
- b) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = 1 - \frac{x^2}{16}$, con $-4 \leq x \leq 4$ entorno al eje x .

3. Longitud de un arco

En este apartado vamos a ver como podemos calcular la longitud de arco de una curva plana aplicando integrales. Lo que haremos será aproximar un arco (un trozo de curva) por segmentos rectos cuyas longitudes vienen dadas por la conocida fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Veamos antes de realizar el desarrollo unas definiciones previas:

Definición: Si un trozo de curva tiene una longitud de arco finita, decimos que es rectificable. 

Veremos en el desarrollo de la fórmula para la longitud de arco, que una condición suficiente para que la gráfica de una función f sea rectificable entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es que f' sea continua en $[a, b]$.

Definición: Decimos que una función f definida en $[a,b]$ es continuamente derivable o derivable con continuidad en $[a,b]$, si f' es continua en $[a,b]$. A su gráfica en dicho intervalo se le llama curva suave. 

Veamos ahora como podemos calcular la longitud de un arco.

Sea f una función continua y derivable con continuidad en el intervalo $[a,b]$, y denotemos por ℓ la longitud de su gráfica en este intervalo. Aproximamos la gráfica de f por n segmentos cuyos extremos están determinados por la partición P de $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Haciendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, aproximamos la longitud del arco por:

$$\ell \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i)$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ ($\|\Delta\| \rightarrow 0$), tenemos que:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i)$$

Por existir $f'(x) \forall x \in (x_i, x_{i-1})$, el teorema del valor medio garantiza la existencia de un $c_i \in (x_i, x_{i-1})$ tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \Rightarrow \quad f'(c_i) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Además, como f' es continua en $[a,b]$, sabemos que $\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}$ también es continua (y, por tanto, integrable) en $[a,b]$, y tenemos:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (\Delta x_i) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Llamamos a ℓ longitud de arco de f entre a y b .

Definición: Si la función $y = f(x)$ representa una curva suave en el intervalo $[a,b]$, la longitud de arco de f entre a y b viene dada por:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad \img alt="small icon" data-bbox="675 745 695 755"/>$$

Análogamente, para una curva suave de ecuación $x = g(y)$, la longitud de arco de g entre c y d viene dada por:

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \quad \img alt="small icon" data-bbox="675 835 695 845"/>$$

Ejemplo 9:

- a) Calcular la longitud de arco de la gráfica $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ sobre $[\frac{1}{2}, 2]$.
- b) Calcular la longitud de arco de la gráfica $(y-1)^3 = x^2$ sobre $[0,8]$.
- c) Hallar la longitud de la curva $f(x) = x^{3/2}$ sobre $[0,1]$.
- d) Aproximar la distancia recorrida por un proyectil que sigue una trayectoria dada por $f(x) = x - 0,005x^2$.

4. Área de una superficie de revolución

Con anterioridad, hemos usado la integración para calcular el volumen de un sólido de revolución. Ahora buscamos un procedimiento para calcular el área de una superficie de revolución.

Definición: Si se gira la gráfica de una función continua alrededor de una recta, la superficie resultante se conoce como *superficie de revolución*. 

Para calcular el área de una superficie de revolución, usamos la fórmula de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto.

Consideremos el segmento donde:

- L = longitud del segmento
- r_1 = radio en el extremo izquierdo del segmento
- r_2 = radio en el extremo derecho del segmento

Cuando se gira el segmento alrededor de su eje de revolución, se forma un tronco de cono circular recto, con:

$$S = 2\pi rL \quad \text{Área de la superficie lateral del tronco}$$

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \quad \text{Radio medio del tronco}$$

Ahora, supongamos que se gira la gráfica de una función f , cuya derivada es continua en el intervalo $[a,b]$, alrededor del eje X , para formar una superficie de revolución. Sea P una partición de $[a,b]$, con subintervalos de anchura Δx_i . Entonces el segmento de longitud

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

genera un tronco de cono.

Por el teorema del valor intermedio, existe un punto d_i tal que $r_i = f(d_i)$ es el radio medio de este tronco. Finalmente, el área de la superficie lateral ΔS_i del tronco viene dada por:

$$\Delta S_i = 2\pi r_i \Delta L_i = 2\pi f(d_i) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = 2\pi f(d_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Por el teorema del valor medio, existe un punto $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que:

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Por tanto:

$$\Delta S_i = 2\pi f(d_i) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i$$

y el área total de la superficie puede aproximarse por:

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^n f(d_i) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, se puede probar que:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

De manera similar, si se gira la gráfica de f en torno al eje y , el área S viene dada por

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

En ambas fórmulas de S , podemos considerar los productos $2\pi f(x)$ y $2\pi x$ como la longitud de la circunferencia que describe el punto (x, y) de la gráfica de f cuando se gira alrededor del eje x o del eje y . En un caso el radio es $r = f(x)$ y en otro el radio es $r = x$. Además, ajustando r apropiadamente, podemos generalizar esta fórmula para incluir áreas de superficies con ejes de revolución horizontales o verticales cualesquiera, como se indica en la siguiente definición:

Definición: Si $y = f(x)$ tiene derivada continua en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la superficie de revolución S formada al girar la gráfica de f alrededor de un eje horizontal o vertical es:

$$S = 2\pi \int_a^b r(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$r(x)$ es la distancia entre la gráfica de f y el eje de revolución correspondiente. 

Observación: Si $x = g(y)$ en el intervalo $[c, d]$, entonces el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_c^d r(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

donde $r(y)$ es la distancia entre la gráfica de g y el eje de revolución correspondiente. 

Ejemplo 10:

- Calcular el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ alrededor del eje x .
- Calcular el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$ alrededor del eje y .

5. Integrales impropias

En este apartado vamos a ver una extensión del concepto de integral para incluir algunos casos interesantes que no son permitidos por la definición de integral.

La definición de integral definida $\int_a^b f(x)dx$ requiere que el intervalo $[a,b]$ sea finito. Además, el teorema fundamental del cálculo, con el que hemos estado evaluando integrales, exige que f sea continua en $[a,b]$. En esta sección discutiremos un proceso de límite para calcular integrales que incumplan estos requisitos, bien sea, porque uno o ambos límites de integración son infinitos, o porque f tiene en $[a,b]$ un número finito de discontinuidades infinitas. Las integrales que se enmarcan en uno de estos dos supuestos se llaman **integrales impropias**.

Por tanto, las integrales $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ y $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ son impropias porque uno o ambos límites de integración son infinitos. Análogamente, las integrales $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ y $\int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$ son impropias porque los integrandos tienen discontinuidades infinitas en algunos puntos del intervalo de integración.

Para hacerse una idea de cómo podemos calcular una integral impropia, considérese la integral:

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b}$$

Por tanto, tomando el límite cuando $b \rightarrow \infty$, resulta que:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\int_1^b \frac{dx}{x^2} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$$

y podemos interpretar la integral impropia como el área de la región *no acotada* entre la gráfica de la función y el eje x.

Definición (de integrales impropias con límites de integración infinitos):

1. Si f es continua en $[a, \infty)$, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

2. Si f es continua en $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

3. Si f es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

En cada caso, si el límite existe, se dice que la integral impropia *converge*; de lo contrario, la integral impropia *diverge*. Esto significa que en el tercer caso la integral diverge si una cualquiera de las dos integrales diverge. ☞

Ejemplo 11: Calcular las siguientes integrales impropias:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

c) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

d) $\int_0^{\infty} \sin x dx$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

Definición (de integrales impropias con una discontinuidad infinita):

1. Si f es continua en $[a, b)$ y tiene una discontinuidad en b entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

2. Si f es continua en $(a, b]$ y tiene una discontinuidad en a entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

3. Si f es continua en $[a, b]$, excepto en un c de (a, b) entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

En cada caso, si el límite existe, se dice que la integral impropia *converge*; de lo contrario, la integral impropia *diverge*. Esto significa que en el tercer caso la integral diverge si una cualquiera de las dos integrales diverge. ☹

Ejemplo 12: Calcular las siguientes integrales impropias:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

d) $\int_0^1 Lx dx$

5.1. Criterios de convergencia para integrales impropias

En este apartado, al igual que ocurría con las series numéricas, vamos a dar una serie de criterios que nos van a permitir estudiar la convergencia de integrales impropias sin necesidad de calcularla, con sólo compararla con otras integrales impropias cuyo carácter conozcamos de antemano. El siguiente teorema, nos va a proporcionar conocer la convergencia o divergencia de una buena cantidad de integrales impropias.

Teorema (p-integrales):

1. Para $a > 0$ la integral impropia $\int_a^{\infty} \left(\frac{1}{x^p}\right) dx$ $\begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}$

2. Las integrales $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$ e $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ $\begin{cases} \text{convergen si } p < 1 \\ \text{divergen si } p \geq 1 \end{cases}$ ■

Ejemplo 13: Estudiar el carácter de la integral $\int_{-3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

Teorema: Sea f una función continua y no negativa, entonces cada uno de los tipos básicos de integrales impropias bien convergen a un número real c o bien divergen a ∞ . ■

Teorema (criterio de comparación estándar) :

1. Sean f y g funciones continuas, y supongamos que $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$

a) Si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ converge

b) Si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx$ diverge

2. Se obtienen resultados análogos para todos los tipos básicos de integrales impropias de funciones no negativas.

a) Si la integral impropia de la función mayor converge, entonces también converge la de la función menor.

b) Si la integral impropia de la función menor diverge, entonces también diverge la de la función mayor. ■

Ejemplo 14: Estudiar el carácter de la integral $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x + 23}$

Teorema (comparación paso al límite): Sean f y g funciones continuas positivas para $x \geq a$. Entonces, si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0$$

entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ y $\int_a^{\infty} g(x) dx$ tienen el mismo carácter. ■

Ejemplo 15: Estudiar el carácter de la integral $\int_1^{\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x^4 + 3x + 2} dx$

Teorema (convergencia absoluta): Sea f una función continua. Si una integral impropia de $|f(x)|$ converge, entonces la integral impropia de $f(x)$ con los mismos límites, también converge. En este caso, diremos que la integral impropia de $f(x)$ converge absolutamente. ■

6. Centroides y teorema de Pappus

En este apartado, trataremos varias aplicaciones importantes de la integración, que se refieren al concepto de **masa**. La masa se considera una medida *absoluta* de la cantidad de materia de un cuerpo, sin embargo, son tantas las aplicaciones en que aparece la masa en la superficie terrestre, que tendemos a igualar la masa de un

objeto con su peso. Esto es técnicamente incorrecto. El peso, es un tipo de fuerza y, como tal, depende de la gravedad. Fuerza y masa se hayan relacionados por la ecuación

$$\text{Fuerza} = \text{Masa} \times \text{Aceleración}$$

Antes de introducir el concepto de centroide, conviene recordar el concepto de momento de masa respecto a un punto.

Definición: Sean m_1, \dots, m_n n masas situadas en x_1, \dots, x_n sobre el eje X . Entonces:

1. El momento respecto del origen es $M_0 = m_1 x_1 + \dots + m_n x_n$
2. El centro de masas es $\bar{x} = \frac{M_0}{m}$, donde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ es la masa total del sistema. 

Podemos extender el concepto de momento a dos dimensiones considerando un sistema de masas situadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, pero en lugar de definir un único momento (con respecto al origen), definimos dos momentos, uno respecto al eje X y otro respecto al eje Y .

Definición: Sean las masas puntuales m_1, \dots, m_n situadas en $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ respectivamente. Entonces:

1. El momento respecto del eje Y es $M_y = m_1 x_1 + \dots + m_n x_n$.
2. El momento respecto del eje X es $M_x = m_1 y_1 + \dots + m_n y_n$.
3. El centro de masas (o centro de gravedad) (\bar{x}, \bar{y}) viene dado por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ es la masa total del sistema. 

En lo tratado hasta aquí hemos supuesto que la masa total de un sistema se encuentra distribuida en puntos discretos de un plano (o de una recta). Ahora consideramos una placa **plana** de un material de densidad uniforme (la llamaremos **lámina**). Intuitivamente, vemos el centro de masas (\bar{x}, \bar{y}) de la lámina como su punto de equilibrio. Por ejemplo, el centro de masas de una lámina circular está situada en el centro del círculo, y el centro de masas de una lámina rectangular está situado en el centro del rectángulo.

Considérese una lámina plana de contornos irregulares y densidad uniforme ρ limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $a \leq x \leq b$. La masa de esta región será:

$$m = \text{densidad} \cdot \text{area} = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \rho \cdot A$$

donde A es el área de la región. Para hallar el centro de masas de esta lámina, partimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales de anchura Δx . Entonces, si x_i es el centro del i -ésimo, subintervalo, entonces podemos aproximar la porción de lámina situada en él por un rectángulo cuya altura es $h = f(x_i) - g(x_i)$. Por ser la densidad del rectángulo ρ , sabemos que la masa es

$$m_i = \text{densidad} \cdot \text{area} = \rho \cdot \underbrace{[f(x_i) - g(x_i)]}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{anchura}}$$

A continuación, consideramos que esta masa está situada en el centro del rectángulo (x_i, y_i) ; sabemos que la distancia del eje X a (x_i, y_i) es $y_i = [f(x_i) + g(x_i)]/2$. Por tanto, el momento de m_i respecto del eje X es:

$$\text{momento} = \text{masa} \cdot \text{distancia} = m_i \cdot y_i = \underbrace{\rho \cdot [f(x_i) - g(x_i)] \cdot \Delta x}_{\text{masa}} \cdot \underbrace{\left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2} \right]}_{\text{distancia}}$$

Sumando estos momentos y tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, definimos el momento respecto del eje X por

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2} \right] \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

Como la distancia desde el eje Y a (x_i, y_i) es x_i , entonces el momento respecto a dicho eje es:

$$M_y = \rho \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

Una vez visto esto, tenemos la siguiente definición.

Definición: Sean f y g funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$. Consideremos la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $a \leq x \leq b$. Entonces:

1. Los momentos respecto de los ejes X e Y son:

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2} \right] \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

2. El centro de masas de (\bar{x}, \bar{y}) viene dado por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad e \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ es la masa de la lámina. 🐾

Observación: La densidad ρ es factor común del momento y de la masa, razón por la cual se cancela en el cociente y no aparece en las coordenadas del centro de masa. Así pues, el centro de masa de una lámina de densidad uniforme depende sólo de la forma de la lámina, no de su densidad. Por eso el centro de masas de la lámina se llama a veces centro de masas de la región del plano que ocupa la lámina, o también **centroide** de la región. En otras palabras, para hallar el centroide de una región del plano, suponemos, sencillamente que la región tiene una densidad constante $\rho = 1$ y calculamos el correspondiente centro de masas. 🐾

Ejemplo 16:

- a) Hallar el centro de masas de una lámina de densidad uniforme ρ , y limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje X .
- b) Hallar el centroide de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Para terminar el tema, enunciamos un teorema útil, que se cree debido a Pappus de Alejandría (300 a. de C.), matemático griego cuya *Colección Matemática* contiene un resumen de gran parte de la matemática de la Grecia clásica.

Teorema (de Pappus): Sea R una región del plano y L una recta en ese plano que no corta al interior de R . Si r es la distancia del centroide de R a la recta L , el volumen del sólido de revolución generado al girar R en torno a la recta L viene dado por:

$$V = 2\pi rA$$

Donde A es el área de R . (Obsérvese que $2\pi r$ es la distancia que recorre el centroide de la región al girar en torno a la recta L). ■

El teorema de Pappus se puede utilizar para calcular el volumen de un **toro**, figura en forma de rosquilla que se genera haciendo girar una región circular en torno a una recta que esté en su mismo plano y que no corte al círculo.

Ejemplo 17: Calcular el volumen del toro que se forma al girar la región circular limitada por $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje Y .